III-2-7. F分布

F 分布は分散の比を確率変数とした確率分布です。t 分布は正規分布する確率とχ^2分布する確率の積の確率分布でしたが、F 分布はχ^2分布する２つの確率の積の分布です。比の分布という考え方はχ^2分布のところにも出てきました。今までやってきた、確率の組み合わせと同じ作業をします。違っているのは分散比（F）が新たな確率変数になるということです。

具体的には、χ^2分布する２つの変数z_1、z_2があり、それらの分散を$\frac{z_1}{n_1}$、$\frac{z_2}{n_2}$としたとき（n は自由度、データ数ではないので注意）、

$$\mathrm{F} = \frac{\frac{z_1}{n_1}}{\frac{z_2}{n_2}}$$

を F 値としてその確率分布を考えます。

$$\mathrm{P}(z_1) = \frac{{z_1}^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} e^{\frac{-z_1}{2}}$$

$$\mathrm{P}(z_2) = \frac{{z_2}^{\frac{n_2}{2}-1}}{2^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} e^{\frac{-z_2}{2}}$$

$$\mathrm{F(f)} = \mathrm{P}(z_1)\mathrm{P}(z_2)$$

$$\mathrm{f} = \frac{\frac{z_1}{n_1}}{\frac{z_2}{n_2}}$$

ということで、f で積分できるように f と直交する平面を考えて、その面積を求めれば良いということで、今までやっていたことと同じです。f と直交する平面をどう考えるのかがポイントです。求積法としての積分の考え方に慣れてくれば、こういう考え方が自然にできます。

$$\mathrm{f} = \frac{z_1}{n_1}\frac{n_2}{z_2}$$

$$z_1 n_2 = \mathrm{f}z$$

$$z_2 n_1 = z$$

と置きます。これならば、f が定義そのままになっているし、新たに作った z は f と互いに独立していて、直交している感じが出ています。

$$0 \le \mathrm{z}_1 \le \infty, 0 \le z_2 \le \infty, 0 \le \mathrm{f} \le \infty, 0 \le \mathrm{z} \le \infty$$

なのだから、

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{P(z)}dz\,df = 1$$

この内側の積分を考えます。

$$\frac{dz_1}{df} = \frac{\mathrm{z}}{n_2}$$

$$\frac{dz_1}{dz} = \frac{\mathrm{f}}{n_2}$$

$$\frac{dz_2}{df} = 0$$

$$\frac{dz_2}{dz} = \frac{1}{n_1}$$

だから、ヤコビアンを考えると

$$J(z_1, z_2/\mathrm{f}, z) = \begin{bmatrix} \frac{dz_1}{df} & \frac{dz_1}{dz} \\ \frac{dz_2}{df} & \frac{dz_2}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{z}}{n_2} & \frac{\mathrm{f}}{n_2} \\ 0 & \frac{1}{n_1} \end{bmatrix} = \frac{z}{n_1 n_2}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{P(z)}dz\,\mathrm{df}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{P}(z_1)\mathrm{P}(z_2)J(z_1, z_2/\mathrm{f}, z)dz\,\mathrm{df}$$

$$\mathrm{F(f)} = \int_0^\infty \frac{{z_1}^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} e^{\frac{-z_1}{2}} \frac{{z_2}^{\frac{n_2}{2}-1}}{2^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} e^{\frac{-z_2}{2}} \frac{z}{n_1 n_2} dz$$

$$= \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\mathrm{f}z}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} e^{\frac{-\left(\frac{\mathrm{f}z}{n_2}\right)}{2}} \frac{\left(\frac{z}{n_1}\right)^{\frac{n_2}{2}-1}}{2^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} e^{\frac{-\left(\frac{z}{n_1}\right)}{2}} \frac{z}{n_1 n_2} dz$$

$$= \frac{\mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)2^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^\infty \left(\frac{z}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} \left(\frac{z}{n_1}\right)^{\frac{n_2}{2}-1} e^{\frac{-\left(\frac{\mathrm{f}z}{n_2}\right)}{2}} e^{\frac{-\left(\frac{z}{n_1}\right)}{2}} \frac{z}{n_1 n_2} dz$$

$$= \frac{\mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^\infty \left(\frac{z}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} \frac{1}{n_2} \left(\frac{z}{n_1}\right)^{\frac{n_2}{2}-1} \frac{1}{n_1} z e^{\frac{-\left(\frac{\mathrm{f}z}{n_2}+\frac{z}{n_1}\right)}{2}} dz$$

$$= \frac{\mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{n_1}{2}-1}}{{n_2}^{\frac{n_1}{2}}} \frac{z^{\frac{n_2}{2}-1}}{{n_1}^{\frac{n_2}{2}}} z e^{\frac{-\left(\frac{\mathrm{f}z}{n_2}+\frac{z}{n_1}\right)}{2}} dz$$

$$=\frac{\mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}n_2{}^{\frac{n_1}{2}}n_1{}^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\int_0^\infty z^{\frac{n_1+n_2}{2}-2}ze^{\frac{-\left(\frac{\mathrm{f}z}{n_2}+\frac{z}{n_1}\right)}{2}}dz$$

$$=\frac{\mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}n_2{}^{\frac{n_1}{2}}n_1{}^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\int_0^\infty z^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}e^{-\left(\frac{\mathrm{f}}{n_2}+\frac{1}{n_1}\right)\frac{z}{2}}dz$$

$$\left(\frac{\mathrm{f}}{n_2}+\frac{1}{n_1}\right)\frac{z}{2}=\mathrm{w}$$

とおきかえると、

$$z=\frac{2}{\left(\frac{\mathrm{f}}{n_2}+\frac{1}{n_1}\right)}\mathrm{w}$$

$$=\frac{\mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}n_2{}^{\frac{n_1}{2}}n_1{}^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\int_0^\infty z^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}e^{-\left(\frac{\mathrm{f}}{n_2}+\frac{1}{n_1}\right)\frac{z}{2}}dz$$

$$=\frac{\mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}n_2{}^{\frac{n_1}{2}}n_1{}^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\int_0^\infty \left\{\frac{2}{\left(\frac{\mathrm{f}}{n_2}+\frac{1}{n_1}\right)}\mathrm{w}\right\}^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}e^{-w}\frac{2}{\left(\frac{\mathrm{f}}{n_2}+\frac{1}{n_1}\right)}dw$$

$$=\frac{\mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}n_2{}^{\frac{n_1}{2}}n_1{}^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\int_0^\infty \left\{\frac{2}{\left(\frac{\mathrm{f}}{n_2}+\frac{1}{n_1}\right)}\right\}^{\frac{n_1+n_2}{2}}\mathrm{w}^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}e^{-w}dz$$

$$=\frac{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\cdot\mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}n_2{}^{\frac{n_1}{2}}n_1{}^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{f}}{n_2}+\frac{1}{n_1}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\mathrm{w}^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}e^{-w}dz$$

$$=\frac{\cdot\,\mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}}{n_2{}^{\frac{n_1}{2}}n_1{}^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{f}}{n_2}+\frac{1}{n_1}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\int_0^\infty \mathrm{w}^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}e^{-w}dz$$

積分記号のところは$\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})$だから

$$=\frac{\cdot\,\mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{n_2{}^{\frac{n_1}{2}}n_1{}^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{f}}{n_2}+\frac{1}{n_1}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$

$$= \frac{\cdot \mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{{n_2}^{\frac{n_1}{2}}{n_1}^{\frac{n_2}{2}}\left(\frac{\mathrm{f}}{n_2}+\frac{1}{n_1}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cdot \mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{{n_2}^{\frac{n_1}{2}}{n_1}^{\frac{n_2}{2}}\frac{(n_1\mathrm{f}+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}{(n_1n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$$

$$= \frac{{n_1}^{\frac{n_1}{2}}{n_2}^{\frac{n_2}{2}}\cdot \mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{(n_1\mathrm{f}+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$$

これをβ関数を使って簡略に表すと

$$= \frac{{n_1}^{\frac{n_1}{2}}{n_2}^{\frac{n_2}{2}}\cdot \mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1\mathrm{f}+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}\beta(n_1,n_2)}$$

$$P(\mathrm{f}) = \frac{{n_1}^{\frac{n_1}{2}}{n_2}^{\frac{n_2}{2}}}{\beta(n_1,n_2)}\cdot\frac{\mathrm{f}^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1\mathrm{f}+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$

式 25.

となります。以上。