III-3. 数学的な技術の説明

III-3-1. Taylor 展開

Taylor 展開とは、複雑な式を分かりやすい多項式の式に近似的に変換するテクニックです。与えられた式を何回か微分して、それらの微分式に適切な定数を掛けたものの総和に近似します。
微積分があまり得意でない読者を想定していますので、一般に行われている部分積分を繰り返す方法ではなく、平均値の定理と積分の概念のみを使って Taylor の定理と Taylor 展開を説明します。ただし、概念としての微積分の説明はどうしても入ります。

関数$\mathrm{f}(x)$f の微分$\mathrm{f}'(x)$ は次のように定義されます。

$$\mathrm{f}'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

式 26

f′(x)は$\frac{df(x)}{dx}$と書く記法もあります。$\frac{df(x)}{dx}$ という記法は、いくつか変数がある中で、f(x)を x という変数で微分するということを強調する記法です。

を$\mathrm{f}(x)$ 2 回続けて部分するときは、あ$\mathrm{f}''(x)$るいは$\frac{d^2(x)}{dx^2}$のように書きます。n回微分するときは $f^{(n)}(x)$と書きます。

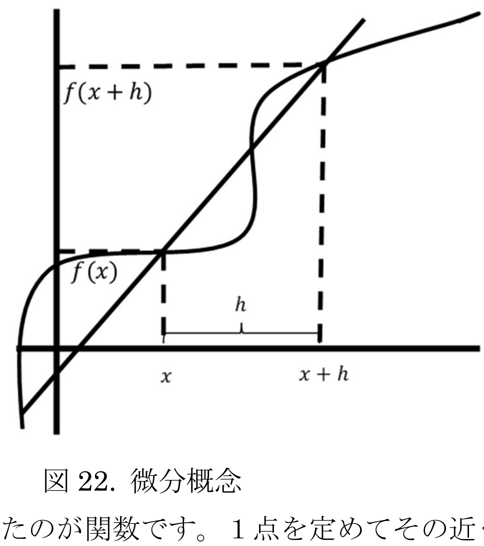

図 22. 微分概念

図 22 の曲線で表したのが関数です。１点を定めてその近くのもう一つの点を動かします。この２点間の直線で結びます。図 22 でhを小さくしていき、$x+h$を無限にxに使づけたときの、直線の傾きを微分と言います。言い換えれば、点（$x, f(x)$）における、接戦の傾きのことです。

ですから、関数$f(x)$が xで連続ならば、

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

とも書けます。（ここで連続というのは、点（$x, f(x)$で、無限大になったり、急に鋭角に曲がって違う関数になったりしていないという程度の意味です。連続という概念をきちんと数学的に定義すると面倒なので、その程度の意味だと理解してください。）

ここで、微分の値と、微分の定義の極限の式の極限の中の式の関係について考えます。

つまり、

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

の関係です。

わかりやすくするために、$x + h = b, x = a$とします。$h = b - a$ですね。

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

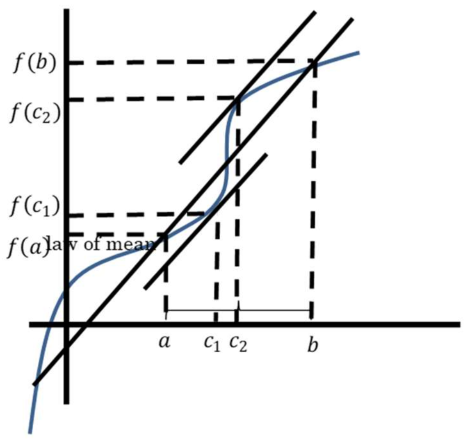

図 23. 平均値の定理の概念

図 23 に示したように、式 22 は、点（$a, f(a)$）と点（$b, f(b)$を結ぶ直線の傾きです。また、$f(x)$がどのように曲がりくねった曲線であっても、a とb の間（$a \le c \le b$）に、微分値$f'(c)$の値が、この直線の傾きと同じになる点が、少なくとも一つ以上あることがわかります。図 23 では C_1 と C_2 がそのような点です。

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),\ (a \le c \le b)$$

式 27

この公式を平均値の定理といいます。aとなるbの間に$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$となる点$c$が少なくとも一つ以上存在するということです。なんだか当たり前の事のようですが、様々な公式や定理や公式の出発点になっている重要な定理です。

以上が、Taylor 展開を理解するために必要な基礎知識です。確認すると微分の定義と平均値の定理の２つです。Taylor 展開でやりたいことは、何かの理由で$f(x)$と$f(b)$いう関数がわからないとき（たとえば、数式で定義されていない。形が複雑で直感的に理解できない。極限の概念が含まれているためそのまま計算できないなど。）に、ある点aにおける値$f(a)$とｎ階の微分値　$f(a), f'(a), f''(a),$ ……$f^{(n)}(a)$で、$f(x)$を近似的に表すことです。
平均値の定理を使うと、

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c_1), \quad \mathrm{a} \le c_1 \le \mathrm{x}$$

ですから、

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(c_1)$$

式 28

です。
$f(x)$の式が決まっていないのですから、$f'(c_1)$もc_1もわかりようがありません。
そこで、$f'(c_1)$の代わりに$f'(a)$を使って、

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+(x-a)f'(a)$$

とできないかと考えるのです。
もちろん、むちゃくちゃです。一般的にはこんなことはできないでしょう。しかし、どんな時でも、できないのかと考えます。
$f(x)=x$
ならばどうですか。
$f'(x)=1$ ですから、$f'(x)$はx にかかわりなく、 $f'(x)=f'(c_1)=f'(a)=1$です。
この場合には、

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)$$

です。
試してみましょう。f(a)=a、f'(a)=1 だから、これらを上の式に代入して。

$$f(x)=a+(x-a)*1=x$$

で確かに、式 25 が成り立っています。
$f(x)=\mathrm{B}x$ でも、$f(x)=\mathrm{A}+\mathrm{B}x$でも成り立つことを確認してください。

しかし、この話は少し腹が立ちませんか。$f(x)$はもともと傾きを持った直線なのだから、あ

る点からの傾きにx軸上の距離をかけて、もとの点のy軸の値に足せば、その直線を伸ばした点のｙ軸の値になるに決まっているだろうと言われそうです。つまり、$f(x)$が直線ならば、式 25 が成り立つのは当然です。
確かに、至極当たり前のことしか言っていません。でも、当たり前のことでも、それをしっかり確かめておくということは、物を考える出発点として大切です。
　では、$f(x) = x^2$ならばどうですか、
この場合
　$f'(x) = 2x$ですから
　$f'(c_1) = 2c_1$
　$f'(a) = 2a$
　で、
　$f'(c_1) \neq f(a)$
　ですから、式 25 は使えません
しかし、ここであきらめずに、もう一回微分しますが、その前に、C_1 とｘ、ａ の関係を見ておきましょう。

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_1)$$

だから

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2c_1$$
$$x + a = 2c_1$$

で

$$c_1 = \frac{x + a}{2}$$

です。つまり、この場合、c_1はｘとａの平均値です。中間点という言い方のほうが良いかもしれません。

さて、２回目の微分について考えを進めます。
　$f''(x) = 2$
　ですから、

$$f''(x) = f''(c_2) = f''(a) = 2$$

です。c_2は、a とx の間のどの点でも良いことになります。
平均値の定理を使って

$$f'(x) = f'(a) + (x - a)f''(c_2)$$

となりますから、

$$f'(c_1) = f'(a) + (c_1 - a)f''(a)$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(c_1)$$

で、この場合、

$$f'(c_1) = f'(a) + (c_1 - a)f''(a)$$

ですから、

$$f(x) = f(a) + (x-a)\{f'(a) + (c_1 - a)f''(a)\}$$

$c_1 = \frac{x+a}{2}$を使って、

$$f(x) = f(a) + (x-a)\left\{f'(a) + ((\frac{x+a}{2}) - a))f''(a)\right\}$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)\left\{f'(a) + (\frac{x-a}{2})f''(a)\right\}$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a)$$

式 29

となります。実際にやってみましょう。

f(a)=a^2

f'(a)=2a

f''(a)=2

ですから、右辺は

$$a^2 + (x-a)(2a) + \frac{(x-a)^2}{2} \times 2$$

$$= a^2 + 2ax - 2a^2 + x^2 - 2ax + a^2$$

$$= x^2$$

で確かに

f(x)=x^2

になります。

一般的な　二次式　f(x)=A+Bx+Cx^2でも同じことになることは、一般型が　f(x)=x^2を二次平面上を移動させただけと考えれば、理解できるでしょう。

少し希望が見えてきたので、念のために、もう一つ確認しましょう。

$$f(x) = x^3$$

の時にはどうなりますか。

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 3 * 2x = 6x$$

$$f'''(x) = 3 * 2 = 6$$

$$f(a) = a^3$$

$$f'(a) = 3a^2$$
$$f''(a) = 3 * 2a = 6a$$
$$f'''(a) = 3 * 2 = 6$$
ですから、
$$f'''(x)=f'''(c_3) = f'''(a) = 6$$
ということになります。
$f(x) = f(a) + (x-a)f'(c_1)$を使って、この関係をあらわすと、
$$f''(c_2) = f''(a) + (c_2 - a)f'''(a)$$
となるのですが、今までのやり方だと、$x-a$、$x-c_1$、$x-c_2$の関係から、直接に$f(x)$を求めることになりますが、できないことはないでしょうが、式が複雑になって結構難しいと思います。そこで、次の単純な微積分を知っていることにします。
$$\{(x-a)\}' = 1$$
$$\{(x-a)^2\}' = (x-a)$$
$$\{(x-a)^n\}' = n(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{n-1}$$
$$\left\{\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C\right\}' = (x-a)^n$$
つまり、$(x-a)^n$の積分は、$\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$に定数を足したものということです。簡単な微積分なので分かりますね。　$f''(c_2) = f''(a) + (c_2 - a)f'''(a)$の$c_2$を$x$に書き換えたものが、$f'(x)$の接線の式ですね。
$$\mathrm{f}''(\mathrm{x}) = \mathrm{f}''(\mathrm{a}) + (\mathrm{x}-\mathrm{a})\mathrm{f}'''(\mathrm{a})$$
この両辺を$(x-a)$で、定積分、したものが$f'(x)$ですから（積分区間は（x,a））、
$$f'(x) - f'(a) = (x-a)f''(a) + \tfrac{(x-a)^2}{2}f'''(a)$$
$$f'(x) = f'(a) + (x-a)f''(a) + \tfrac{(x-a)^2}{2}f'''(a)$$
これをもう一度、同じ区間で定積分して
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{2*3}f'''(a)$$
となります。
$$\mathrm{f(a)} = a^3$$
$$\mathrm{f'(a)} = 3a^2$$
$$\mathrm{f''(a)} = 6\mathrm{a}$$
$$\mathrm{f'''(a)} = 6$$
を代入して計算してみます。

$$f(x) = a^3 + (x-a) * 3a^2 + \frac{(x-a)^2}{2} : 6a + \frac{(x-a)^3}{3*2} * 6$$

$$f(x) = a^3 + 3a^2x - 3a^3 + 3ax^2 - 6a^2x + 3a^3 + x^3 - 3ax^2 + 3a^2 - a^3$$

$$f(x) = x^3$$

となり、確かに正しく元の関数になります。

結果を少しきれいな形に書き換えておきましょう。

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2*1} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3*2*1} f'''(a)$$

ここで、確かめられたことは、n 回微分したときに$f^{(n)}(x)$がxを含まない定数になる関数$f(x)$は

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2*1} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3*2*1} f'''(a) \ + \qquad + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

と表すことができるということです。

これは Taylor の公式と呼ばれている公式です。総和の記号 Σ を使って書くと次のようになります。

関数$f(x)$がn回微分可能であるとき

$$f(x) = f(a) + \sum_{k-1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

式 30

しかし、問題は、すべての関数$f(x)$にこの公式が適用できるかということです。

言い換えれば、すべての関数が何回か微分すると定数になるかという問題です。

このことはすぐに否定できます。

たとえば、$f(x) = \sin x$はどうですか

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f''''(x) = \sin x$$

ですから、何回微分しても定数にはなりません。

しかし、もし、xが限りなくaに近ければどうなりますか。

どんな曲線も短い区間では近似的の直線に見えます。直線を微分すれば定数になるし、定数になったらそれ以上微分できません。微分の定義の式で、分数の上下が 0 になってしまい、$\frac{0}{0}$という意味のない式になってしまうからです。

ですから、xが十分aに近くて、$x-a$が十分小さければ

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + \frac{(x-a)}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2*1}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3*2*1}f'''(a) \quad + \qquad + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

式 31

です。これを使えば、n 回の微分値がわかれば、それを使って、複雑な関数を近似的に、多項式で表すことができます。
何回部分すればよいかは、xの範囲がどのくらいaに近いかによりますし、どのくらいの誤差を認めるかによって違います。
ところで、式 28 の最後の項

$$\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

について考えます。
近似式でなければ

$$\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

ですね、c がわからないから、近似的に a で間に合わせたのです。$\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$は、

$\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(x)$が区間$(a,x)$の範囲で変動する値のどれかですから、区間$(a,x)$における、

$\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(x)$の最高値と最低値の間で変動します。

つまり、f(x)の近似式の推定誤差の範囲は、$\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(x)$の区間$(a,x)$の最低値と最高値の幅

です。そういう意味で$\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(x)$を余剰項と呼びます。

以上で、Taylor の公式と Taylor 展開の説明は終わりなのですが、この説明では、Taylor の公式を微分の定義と平均値の定理から解説しました。普通の教科書では、部分積分の公式を使って、わずか数行でこの公式の証明を終わりにしています。部分積分を知っていれば、その方がはるかに簡単です。ただ、いきなり何をしたいのかという説明もなく、部分積分の公式を使って、Taylor の公式と Taylor 展開を説明されても、いったい何のために何をしているのかがわかりません。そこでわざわざ上記のような長い説明をしたのです。
念のために、部分積分を使った証明の一例を紹介しておきます。
部分積分とは、積の微分の公式から導かれる積分の計算の仕方です。
　まず、その説明からします
　　$f(x)g(x)$という２つの関数を掛け合わせた合成関数について、その微分を考えます。
つまり

$$\mathrm{F}(x) = f(x)g(x)$$

$$\mathrm{F'(x)}=\{f(x)g(x)\}'$$

ということです。

微分の定義によって

$$\mathrm{F'(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

ですから、

$$\mathrm{F'(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)f(x+h)-g(x)f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)f(x+h)-g(x+h)f(x)+g(x+h)f(x)-(g(x)f(x)}{h}$$

つまり、分子の２つの項の間に$-g(x+h)f(x)+g(x+h)f(x)$を入れます。=

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)f(x+h)-g(x+h)f(x)+g(x+h)f(x)-g(x)f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)\{f(x+h)-f(x)\}+f(x)\{g(x+h)-(g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}g(x+h)\frac{\{f(x+h)-f(x)\}}{h}+\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\mathrm{g(x)f'(x)+g'(x)f(x)}$$

となるので、

$$\{g(x)f(x)\}'=g(x)f'(x)+g'(x)f(x)$$

式 32

という　関数の積の部分の公式が得られます。

これを両辺を積分して得られるのが、部分積分の公式です。

$$\int\{g(x)f(x)\}'dx=\int g(x)f'(x)dx+\int g'(x)f(x)dx$$

$$g(x)f(\mathrm{x})=\int g(x)f'(x)dx+\int g'(x)f(x)dx$$

これを、$\int g'(x)f(x)dx$について、書き換えると

$$\int g'(x)f(x)dx=\mathrm{g(x)f(x)}-\int g(x)f'(x)dx$$

式 33(部分積分)

２回微分可能ならば

$$\int g'(x)f'(x)dx=\mathrm{g(x)f'(x)}-\int g(x)f''(x)dx$$

とも書けますね。

これを、区間（a.b）の間の定積分として表せば

$$\int_a^b g'(x)f'(x)dx=[g(x)f'(x)]_a^b-\int_a^b g(x)f''(x)dx$$

となります。

テーラー展開の趣旨からいえば、$x=a$で$f(a)$、$f'(a)$、$f''(a)$・・・・$\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(x)$がわかっている時に、x≠a で$f(x)$を求めるのですから $\int_a^x$ を初めから考えたくなるのですが、解析の途中では、区間(a,b)でxを動かさなければならないから、$\int_a^b$ として。区間 (a,b)としてのbと区間内で動くxを区別します。

さて$g'(x)=1$ならば、$\int f'(x)dx=f(x)$ ですから（微分したものを積分すれば元の関数に戻るのは自明）,

これを定積分で表すと

$$[f(x)]_a^b=f(b)-f(a)$$

です。右辺について考える前に、$g'(x)$=1 となる$g(x)$を考える必要があります。天下り的に結論を述べると、$g(x)=-(b-x)$ とします。$x-b$で良さそうな気がします、実際、その通りなのですが、xは区間(a,b)の間にあって、$a\le x\le b$です。問題にしているのは、$a-b$長さと、$x-b$の長さの関係です。(x,b) の距離は$b-x$ です。この論理的な関係を強調して、$b-x$で部分積分しているという感じを強調していると思ってください。

$$\int_a^b f'(x)dx=[g(x)f'(x)]_a^b-\int_a^b g(x)f''(x)dx$$

$$[f(x]_a^b=[-(b-x)f'(x)]_a^b+\int_a^b(b-x)f''(x)dx$$

$$f(b)-f(a)=-(b-b)f'(b)-\{(-(b-a)f'(\mathrm{a}))\}+\int_a^{\mathrm{b}}(b-x)f''(x)dx$$

$$\mathrm{f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)}+\int_a^b(b-x)f''(x)dx$$

次に、右辺の定積分について、同じような操作を考えます。$g'(x)=(b-x)$と考えるのです。そうすると

$$g(x)=\frac{-(b-x)^2}{2}$$

ですから

$$\int_a^b(b-x)f''(x)dx=\left[\frac{-(b-x)^2}{2}f''(x)\right]_a^b+\int_a^b\frac{(b-x)^2}{2}f'''(x)$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\int_a^b\frac{(b-x)^2}{2}f'''(x)$$

この結果を、$\mathrm{f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)}+\int_a^b(b-x)f''(x)dx$に代入すれば

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\int_a^b\frac{(b-x)^2}{2}f'''(x)dx$$

以下これを繰り返して,

$\mathrm{f(b)-f(a)}$ ＝

$$\mathrm{(b-a)f'(a)}+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3*2}f'''(a)+\cdots\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\int_a^b\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)dx$$

となります。
この式は、$f(x)$がn回微分可能だったときに成り立ちます。
これには２つの場合があります。
１） n 回微分可能だが、それ以上（n+1）回以上の微分はできない
２） n 回微分可能で、それ以上の微分も可能。
もし、１）の意味で n 回微分可能なのならば、$f^{(n)}(x)$は定数でそれ以上微分できないということです。
この場合、積分記号の中の、$f^{(n)}(x)$は定数でxと関係ありませんから、下のように積分記号の外に出せます。

$$\int_a^b \frac{(b-\ x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx = f^{(n)}(x)\int_a^b \frac{(b-x))^{n-1}}{(n-1)!}dx$$

この式の右辺の定積分は

$$\int_a^b \frac{(b-x))^{n-1}}{(n-1)!}dx = \left[\frac{(b-x)^n}{n!}\right]_a^b$$

$$= \frac{(b-b)^n}{n!} - \left\{-\frac{(b-a)^n}{n!}\right\}$$

$$= \frac{(b-a)^n}{n!}$$

ところで、1)の場合は$f^n(x)$は直線$f^{n-1}(x)$の傾きで,x にかかわらずどこでも一定だから

$$f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a)$$

$$f(b)-f(a)$$

$$= (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3*2}f'''(a) + \cdots\cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

ここで、もともとの目的は、f(b)を多項式で表すことなのですから、b を x と書き換えて、f(a)を右辺に移項すれば

$$f(x) = f'(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3*2}f'''(a) + \cdots\cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

となります。これで十分といえないこともないような気がしますが、一般化するために２の場合についても考えてみましょう。

$$f(b)-f(a)\ =$$

$$(b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3*2}f'''(a) + \cdots\cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-\ x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)dx$$

という式の最後の積分の項を式⑳の$\frac{(b-a)^n}{n!}f^n(a)$のように積分を含まない多項式の形に書き換えられないかということです。微分可能なのだからそのような微分値となる x を c として、$\frac{(b-a)^n}{n!}f^n(c)$と書けばよいだけのことだろうと、乱暴なことをしたくなります。しかし、区

間(a,b)の間にそのような c が存在するとは限りません。いや、直感的にはそのような点が存在しそうだし、実際、必ず一つ以上は存在するのですが、今使っている論理の中では、そのような点が、区間(a,b)の間に必然的に存在するとは言えません。そこで、そのことを確認しておく必要があります。（数学は厳密にやろうとすると面倒くさい。だから、興味のない人は以下の説明は読み飛ばしてください。）

$$\int_a^b \frac{(b-\ x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x)dx$$

という式が厄介なのは、積分記号の中にxの関数として$f^n(x)$が含まれていて、これがなんだかわからないという前提で考えなければばならないからです。１）の時はなんだかわからないけれど、定数だから、$f^n(x) = f^{\,n}(a)$として、積分記号の外に放り出したのですね。同じことを考えればよいでしょう。$f^n(x)$は変数で区間（a,b）で値は変動するけれど、ある値の幅の範囲内にあるはずです。その最小値を m として、その最大値を M とし、$f^n(x) = f^n(c)$として、定数として考えるのです。

つまり、m ≤ $f^n(c)$ ≤M ということです。

念のために確認しておきますが、$f^n(x) = m$、$f^n(x) = M$となる点をそれぞれ a_m、b_M とすると（数式で書けば、$f^n(a_m) = m$、$f^n(b_M) = M$）、

$$a \le a_m \le c \le b_M \le b$$

という位置関係にあります。m やMを区間(a,b)での最大値、最小値と決めたのだからそうなるに決まっています。

そのうえで、$\int_a^b \frac{(b-\ x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x)dx$について考えると、

$$\int_a^b \frac{(b-\ x)^{n-1}}{(n-1)!} mdx \le \int_a^b \frac{(b-\ x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x)dx \le \int_a^b \frac{(b-\ x)^{n-1}}{(n-1)!} Mdx$$

となっているはずです。積分記号の中の式の大きさは、この順番どおりなのだから、それを積分（それらを微小区間に分けて足し合わせたもの）した値も、この大きさの順番になるはずです。上述のように定数$f^n(c)$を定義したのですから、$f^n(x)$を$f^n(c)$と書き換えて、

$$\int_a^b \frac{(b-\ x)^{n-1}}{(n-1)!} mdx \le \int_a^b \frac{(b-\ x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(c)dx \le \int_a^b \frac{(b-\ x)^{n-1}}{(n-1)!} Mdx$$

$$m\int_a^b \frac{(b-\ x)^{n-1}}{(n-1)!} dx \le f^n(c)\int_a^b \frac{(b-\ x)^{n-1}}{(n-1)!} dx \le M\int_a^b \frac{(b-\ x)^{n-1}}{(n-1)!} dx$$

$$\frac{(b-x)^n}{n!} m \le \frac{(b-x)^n}{n!} f^n(c) \le \frac{(b-x)^n}{n!} M$$

となって、確かに区間（a,b）の間に、

$$\int_a^b \frac{(b-\ x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x)dx = \frac{(b-x)^n}{n!} f^n(c)$$

となる c が存在します。

したがって

$$f(b)-f(a)$$

$$=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3*2}f'''(a)+\cdots\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^n(c)$$

ここで、もともとの目的は、f(b)を多項式で表すことなのですから、b を x と書き換えて、f(a)を右辺に移項すれば。Taylor の公式

$$f(x)=(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3*2}f'''(a)+\cdots\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(c)$$

最後の項は余剰項ですね。

以上で、Taylor の公式、Taylor 展開の説明は終わりです。少し、補足的な説明をしておくと、Taylor の公式の証明には様々なやり方があります。上で示した証明は、何をやりたいのか、どのようにして公式をみつけたのかという実感を大切にした証明です。ですから、あまり洗練された鮮やかな証明とは言えないでしょう。

少し工夫された証明としては、

$$\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)dt$$

について、上記の方法とは反対むきに、$f^{(n)}$からf'*の方向*に部分積分を繰り返すというのがあります。こちらの方が洗練されていて、数行で証明が終わる上に、余剰項についての検討がいらないという利点があります。なにしろ、余剰項から出発しているのですから。しかし、これは Taylor 展開の結果を知っているからできる証明です。最初からこれがわかっているくらいならば、苦労しないと思います。つまり、こういうのはもともと数学が得意な人用の解説だと思います。

それに比べると、泥臭い証明ですが、微分してできる導関数が直線とみなせるところまで微分して、その積分を繰り返して、近似的にもとの関数を近似的に多項式で表すという方法は、そもそも何がしたいのか見やすいという利点があると思います。そういうことで、証明を覚えるというよりは、何をしているのか理解してもらうという目的で、最初の証明を採用しました。