III-3-4. 極座標

積分には方向性があり、多次元空間で積分する場合、積分する方向と座標軸が一致していれば、積分が容易です。ですから、座標軸を変換して積分が容易になるようにすることが行われます。よく使われるのは直交座標から極座標への変換です。典型的なのは球体の表面積や体積の計算です。球は三次元空間の図形ですから、直交空間では体積は縦横高さの微小区間の積を積分区間で積分すれば良いので、下の重積分で表せます。

$$I=\int\int\int_{D} dxdydz$$

D は積分区間でこの場合は球ですから次の式になります

$$\mathrm{D}: x^2+y^2+z^2\le r^2$$

これを直交座標のまま積分すると以下の式になります。

$$I=\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\int_{-\sqrt{r^2-x^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-z^2}}\int_{-\sqrt{r^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-y^2-z^2}}dxdydz$$

この場合は、それぞれの積分方向が軸と一致していますから、極座標変換せずに、このままでも積分の解を求めることが出来ます。

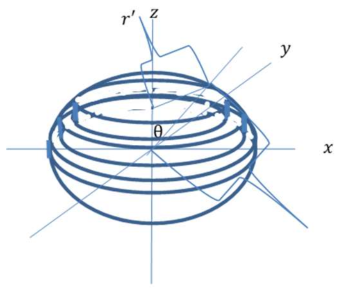

図 24. 直交座標での球体の求積法

直交座標での積分は　図 24 のように薄い円盤を重ね合わせるようにＺ方向に積分するという方法です。この円盤の半径は

$$r'=\sqrt{r^2-z^2}$$

なので、薄い円盤の面積は

$$S=\pi r'^2=\pi(r^2-z^2)$$

なので、円盤の体積は微小なＺ方向の長さを掛けて

$$\mathrm{V}_d=dzS=\pi(r^2-z^2)dz$$

これを$-r$からrの範囲で積分します。

$$\int_{-r}^{r}Sdz=\int_{-r}^{r}\pi(r^2-z^2)dz=\pi\left[r^2z-\frac{z^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\pi\left(\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\left(-r^3+\frac{r^3}{3}\right)\right)=\frac{4\pi r^3}{3}$$

確かに、このように極座標変換しなくても体積を求めることが出来ます。また、これは重積分ではありません。ただし、円の面積の公式を使っています。円の面積の公式はπr^2です

が、これは既知の情報として与えられます。しかし、円の公式そのものが極座標で計算されたものですから、実は極座標を使っているのです。つまり、この空間は円筒座標なのです。円筒座標は水平方向の極座標と垂直方向の直交座標を組み合わせた座標系です。しかし、球の表面積ではこの方法は使えません。球の表面は曲率を持っているので、Z 方向では積分の方向が違うからです。

様々な極座標を考えることが出来ます。たとえば円筒座標も極座標だと考えると、様々な組み合わせを想像することが出来て複雑な組み合わせを考えることが出来るでしょう。最も感覚的に理解しやすい球体の極座標です。そこで次のような直交座標から極座標への返還を考えます。

$$f(x,y,z)\ \rightarrow \boldsymbol{l}(l,\theta,\varphi\,)$$

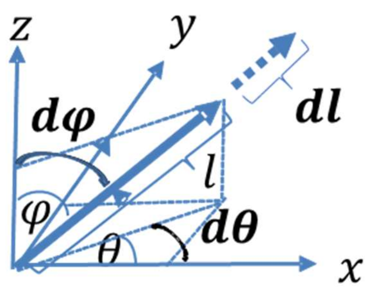

図 25. 直交座標と極座標の関係（矢印は積分方向）

$$x = l\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = l\sin\theta\sin\varphi$$
$$\mathrm{z} = l\cos\theta$$

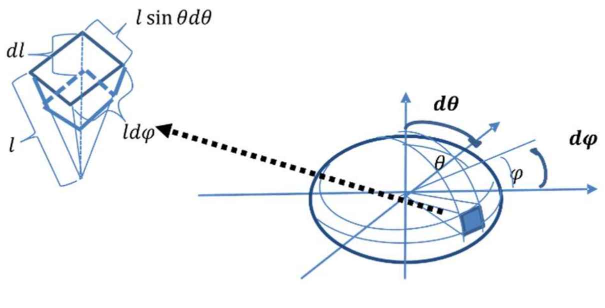

図 26.極座標による求積（rは半径）

この極座標での微小体積のユニットは太線の四角で囲まれた立方体です。極座標の軸である$\mathrm{r}, \theta, \varphi$ は独立しています。これを直交していると表現すれば、極座標で表した最小ユニットの立体は図 27 のように近似的に直交しています。

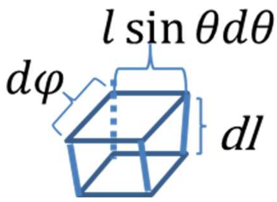

図 27. 微小積分単位

この体積は以下の通りです。

$$\mathrm{V}_u = l^2 \sin\theta dl d\theta d\varphi$$

この微小ユニットのそれぞれの積分方向は直交しているので、それぞれの方向に独立して積分することが出来ます。そこで、次の単位面積をφについて 0 から 2πまで、θについて 0 から πまで積分すれば、球体の表面積になります。

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} l^2 \sin\theta d\theta d\varphi = l^2 \int_0^{2\pi} -[\cos\theta]_0^{\pi} d\varphi = l^2 \int_0^{2\pi} -(-1-1)d\varphi = 2l^2 \int_0^{2\pi} -d\varphi$$

$$= 2l^2[\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi l^2$$

$$l = r$$

$$S = 4\pi r^2$$

ここで、球体を同心円状に球体の表面が重なったものだと考えて、中心から最表面に向けて球体の表面を積分すれば球体の体積になるはずですから、以下の様に積分すれば球の体積を求めることが出来ます。

$$V_s = \int_0^r 4\pi l^2 dl = 4\pi \int_0^r l^2 dl = 4\pi \left[\frac{l^3}{3}\right]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

これのプロセスを最初から積分の形にすると

$$V_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} l^2 \sin\theta \, dl d\theta d\varphi$$

$$\int_0^r l^2 dr = \frac{r^3}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 2$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$$V_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} l^2 \sin\theta \, dl d\theta d\varphi = \int_0^r l^2 dl \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi r^3$$

これらの説明で、筆者はまず、円筒座標を使って、球体の体積の求積法を紹介しました。その公式は中学校で習ったと思います。円筒座標とは、図 28 のように空間を捉えた座標系です。実際の計算では、まず、平面的な円の面積を極座標系で求めます。

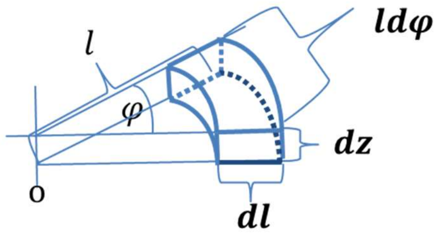

図 28. 円筒座標の求積法での積分ユニット

この積分でのユニットの体積は以下の通りです。

$$\mathrm{V}_u = l\,dldzd\varphi$$

まず、水平方向の円盤の面積を求めます。

$$\mathrm{S}_d = \int_0^{2\pi}\int_0^r l\,dld\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}l^2\right]_0^r d\varphi = \frac{1}{2}r^2\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{1}{2}r^2[\varphi]_0^{2\pi} = \pi r^2$$

これが円の面積の公式ですね。

初めから球の体積を求めると、r、 φ、θで次のように積分します。

$$\mathrm{V}_s = \int_0^{2\pi}\int_0^r\int_{-l}^{l} l\,dzdl\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^r l[z]_{-l}^{l}\,drd\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^r 2l^2dldz = 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}l^3\right]_0^r d\varphi$$

$$= \frac{2}{3}r^3\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{2}{3}r^3[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

これらのプロセスを振り返ると、次のことがわかります。まず、円筒座標での球の体積は次の式です

$$\mathrm{V}_u = l\,dldzd\varphi$$

また、極座標での球の体積は次の通りです。

$$\mathrm{V}_u = l^2\sin\theta dld\theta d\varphi$$

これらの式はいずれも、各座標軸の最小ユニットの積の部分と、その他の部分 l や $l^2\sin\theta$ の部分で来ています。ここで、$drdzd\varphi$や$drd\theta d\varphi$ をそれぞれの座標系における単位体積と考えると、l や $l^2\sin\theta$ 単位体積にかかる係数のように見えます。私たちはこの係数をヤコビアンと呼んでいるのです。 著者がヤコビアンを座標変換に伴う拡大倍率だと説明するのはそういう意味です。もちろん、実際の拡大倍率は積分方向と積分範囲によって変わります。上の説明ではその空間の最小ユニットの体積を計算してヤコビアンを求めましたが、このやり方は一般的ではありません。4次元以上の高次になると計算が難しくなります。変換元の座標軸と返還後の座標軸の間の総当たりの偏微分によって、ヤコビアン行列を作る方法が一般的です。

以下に、３次の直交座標から極座標への変換の例を示します。

$$f(x,y,z) \rightarrow \boldsymbol{l}(l,\theta,\varphi)$$

$$x = l\,\mathrm{sin}\theta\cos\varphi$$

$$y = l\sin\theta\sin\varphi$$

$$\mathrm{z} = l\cos\theta$$

ヤコビアン行列は以下の通りになります

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial l} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial l} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial l} & \frac{\partial z}{°\mathrm{F}\theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & l\cos\theta\cos\varphi & -l\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & l\cos\theta\sin\varphi & l\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -l\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

ヤコビアンはヤコビアン行列の行列式です。

$$|\mathrm{J}| = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & l\cos\theta\cos\varphi & l\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & l\cos\theta\sin\varphi & l\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -l\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + l^2\sin\theta\cos\theta^2\cos^2\varphi + l^2\sin^3\theta\sin^2\varphi + l^2\sin^3\theta\cos^2\varphi + 0 + l^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi$$

$$= l^2\sin\theta\cos\theta^2\cos^2\varphi + l^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi + l^2\sin^3\theta\sin^2\varphi + l^2\sin^3\theta\cos^2\varphi$$

$$= l^2\sin\theta\cos\theta^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + l^2\sin^3\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

$$= l^2\sin\theta(\sin^2\theta + \cos\theta^2)$$

$$= l^2\sin\theta$$

したがって

$$dxdydz = |J|dld\theta d\varphi = l^2\sin\theta dld\theta d\varphi$$

となり、重積分は以下の通りになります。

$$\int\int\int_D dxdydz = \int\int\int_D l^2\sin\theta dld\theta d\varphi$$

同様に、直交座標から円筒座標への変換では

$$f(x, y, z) \rightarrow \boldsymbol{l}(l, \varphi, z)$$

$$x = l\cos\varphi$$

$$y = l\sin\varphi$$

$$\mathrm{z} = z$$

という関係があるので、ヤコビアン行列は

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial l} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial l} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial l} & \frac{\partial z}{°\mathrm{F}\theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -l\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & l\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、ヤコビアンは

$$|\mathrm{J}| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -l\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & l\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= l\cos^2\varphi + l\sin^2\varphi$$

$$= l$$

となるので、最小の単位ユニットの体積の関係は

$$dxdydz = |J|dld\varphi dz = ldl\varphi dz$$

となり、積分は次のようになります。

$$\iiint_D dxdydz = \iiint_D ldl\varphi dz$$

これらの事例は、積分範囲が全域にわたっていますが、積分範囲が狭い例を挙げます。例として挙げるのは、二項分布から正規分布を作る際に使った重積分です（III-2-4)。この計算は、次のように、重積分を二つの積分の積として表す計算の逆計算から出発します。

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx \times \int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2} \times e^{-y^2}dxdy$$

これは、極座標に変換するための準備です。x と y はもともと同じもので、その確率分布の形は、等高線が同心円状になる山形で、この山を中心のところで、４分の一にカットした形で、中心を含む切断面は、どの方向でも同じ形です（図 29)。

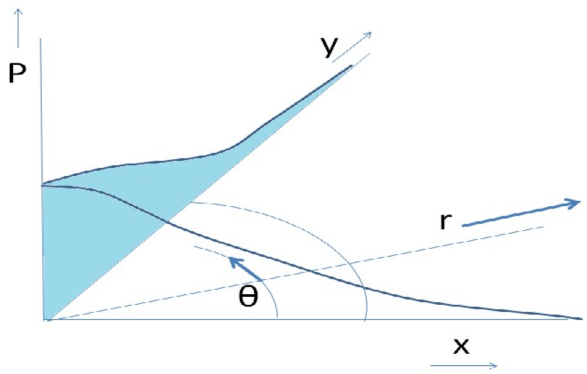

Fig. 29 Shape of distribution of probability

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2} \times e^{-y^2}dxdy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\mathrm{z} = \mathrm{z}$$

ヤコビアンを計算します。

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

積分範囲ですが、内側の積分については、0 から無限大で、外側については 0 から$\frac{\pi}{2}$です。

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2}\, rdrd\theta$$

$$\because x^2 + y^2 = r^2$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$$

$\int_0^\infty \quad \rightarrow\rightarrow \int_0^\infty$

When $x \to \infty$ and $y \to \infty$, then $x^2 + y^2 \to \infty$ *and* $r \to \infty$ $(r \geq 0)$

$\int_0^\infty \quad \rightarrow\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$\tan\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}$$

ここで yを無限大にすると,

$$\tan\theta \to \infty \ and\ \theta \to \frac{\pi}{2}$$

元に戻って

$$s = r^2$$

$$\frac{\partial s}{\partial r} = 2r$$

$$r\partial r = \frac{\partial s}{2}$$

When $\mathrm{r} \to \infty$, then $\mathrm{s} \to \infty$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2}\, rdrd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-s}\, dsd\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [e^{-s}]_0^\infty d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (0-1)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

となります。