IV-3-2. Ｆ検定

F 検定では、データがある要因で説明できるかということを検定します。データの中にはその要因で説明できるいくつかの水準ごとに分けられた複数のデータ群があり、そのデータ群間に差があるか（水準間の分散は、要因とは関係のないランダムな分散と比べて十分に大きいか)、つまり、その要因はデーターの変動を説明する要因だと考えられるかということを検定します。たとえば、水温という要因があって、いくつかの温度帯（水準）で、メダカを飼育してその成長をデータとしてとります。水準間の変動がランダムな変動に比べて十分大きければ、水温は成長を説明する要因の一つだと言えます。したがって、データーの変動（分散）を、要因で説明できる変動（分散）と説明できない変動（分散）に分けることが必要になります。この方法を使うと、要因が組み合わさっている場合にも要因ごとに変動（分散）を分離することができます。この場合にも、説明できないランダムな分散と要因によって説明されると考えられる分散の比（Ｆ比）をとって、その値が十分の大きければ、その要因は測定されたデータの変動を説明する要因の一つだということができます。

原理的には要因の数はいくらでも増やせます。しかし、実際のデータは、ランダムな変動を明確にするために繰り返しがあったり、実験や統計の都合によって、階層的な構造を持っていたり、データの組み合わせが複雑で一般化できません。ここでは、単純な１要因のＦ検定（One way ANOVA, analysis of variance の略）、２要因のＦ検定(two way ANOVA)、繰り返しのある 2 要因のＦ検定の例を説明します。すでに、変動要因の分離法は IV-2-1.分散の分離、IV-2-3.データの構造のところで説明済みです。ここでは具体的な手順を紹介します。

IV-3-2-1. １要因分散分析

具体例を挙げて説明します。表 10 に示した例では、A 群に６個、B 群に７個、C 群に５個、D に６個　のデータがあり、この平均値間に差があるかどうかを検討します。

表 22. 1 要因分散分析の例

記号	A	B	C	D
	2	10	8	9
	5	2	7	15
	3	4	3	8
	8	9	4	12
	9	13	5	13
	4	14		4
		15		

分析の手順は以下の通りです。

１．全平方和(SS_{total})を計算する

２．各水準ごとの平均値を計算する。

３．残差平方和計算する

４．全平方和から残差平方和を差しいて、水準間の平方和とする。

５．全自由度と水準間の自由度の差として、残差自由度を求める。

６．残差平方和を残差の自由度で割って、残差分散を求める。

７．水準間の平方和を水準間の自由度で割って、水準間の分散をもとめる。

８．水準間の分散を残差自由度で割って、これをＦ値とする。

９．判定のための危険率を定め、水準間の自由度を分子の自由度、残差の自由度を分母の自由度として、Ｆ臨界値の表などを使って、有意性を判定する。

１要因分散分析の計算

データ群	A	B	C	D	合計	
	2	10	8	9		
	5	2	7	15		
	3	4	3	8		
	8	9	4	12		
	9	13	5	13		
	4	14		4		
		15				
n_i	6	7	5	6	24	N
T_i	31	67	27	61	186	T
$\overline{x}_i$	5.166667	9.25	5.4	10.16667		
S_i	199	791	163	699	1852	S
$\frac{T_i^2}{n_i}$	160.1667	641.2857	145.8	620.1667	1567.419	$\sum\frac{T_i^2}{n_i}$

表中の記号の説明

n_i：グループｉのデーター数

T_i：グループｉのデーターの合計

$\overline{x}_i$：グループｉの平均値

S_i：グループｉのデーターの２乗の和　$\sum x^2$

具体的な計算テクニックですが、IV-2-3（データの構造）で使った、以下の計算法を使います。

$$SS = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = S - \frac{T^2}{n}$$

もう一度復習すると、

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{x} + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}$$

$$\because \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

ここで

$$S_i = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$$

S と表すことにすると

$$SS_i = S_i - \frac{{T_i}^2}{n_i}$$

これ各グループの残差平方和といいます。

この値のすべてのグループについての和は

$$S_1 - \frac{{T_1}^2}{n_1} + S_2 - \frac{{T_2}^2}{n_2} + \cdots + S_i - \frac{{T_i}^2}{n_i} + \cdots + S_n - \frac{{T_n}^2}{n_n}$$

だから

全体の残差平方和は

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_i + \cdots + S_n - \left(\frac{{T_1}^2}{n_1} + \frac{{T_2}^2}{n_2} + \cdots + \frac{{T_i}^2}{n_i} + \cdots + \frac{{T_n}^2}{n_n}\right)$$

ここで

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_i + \cdots + S_n$$

したがって、全体の残差平方和は

$$S - \left(\frac{{T_1}^2}{n_1} + \frac{{T_2}^2}{n_2} + \cdots + \frac{{T_i}^2}{n_i} + \cdots + \frac{{T_n}^2}{n_n}\right)$$

一方全体の SS は

$$\mathrm{S} - \frac{T^2}{n}$$

（n は全データー数）

残差平方和は全分散の中の部分分散です。残差平方和は各グループの中でグループの平均からの隔たりとして求めたものだから、グループ間の違いを反映していないランダムな変動です。全分散中の残りの部分はグループの違いを反映した SS です。これをグループ間の変動の平方和と呼びます。これを求めるには

$$SS_{A+B+\cdots+N} = SS_A + SS_B + \cdots + SS_N$$

を利用して、全平方和から残差平方和の合計を差し引けばよい。

$$SS_A = \mathrm{S} - \frac{T^2}{n} - \left\{ S - \left(\frac{{T_1}^2}{n_1} + \frac{{T_2}^2}{n_2} + \cdots + \frac{{T_i}^2}{n_i} + \cdots + \frac{{T_n}^2}{n_n} \right) \right\}$$
$$= \left(\frac{{T_1}^2}{n_1} + \frac{{T_2}^2}{n_2} + \cdots + \frac{{T_i}^2}{n_i} + \cdots + \frac{{T_n}^2}{n_n} \right) - \frac{T^2}{n}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{{T_i}^2}{n_i} - \frac{T^2}{n}$$

表 22 の計算例では

n=24

T=186

S=1852

$\sum_{I}^{N} \frac{{T_i}^2}{n_i}$=1567.419

だから

全 SS　は　　1852-(186²/24)=410.5

水準間の SS は 1567.419-(186²/24)=125.919

残差の SS は　1852-1567.419=284.581

これらをそれぞれの自由度で割った平均平方(M..S)は

水準間　62.95952

残差　　13.55147

これらの比　F の値は

F=62.95952/13.55147=4.645954

となります。

次に統計の教科書の巻末の F 統計表を見ます。

見方としては、分子の自由度が列、分母の自由度が行です。

Ｐ＝０．０５の表では

分子の自由度２、分母の自由度２１のＦ臨界地の値は３．４７

です。

F=4.645954

で 3.47 にくらべて十分大きい。そこで、グループ間には差があると結論します。

分散分析の結果は以下のような分散分析表によって表します。

表 23. 分散分析表の例

変動源	平方和 (SS)	自由度 (df)	平方平均 (MS)	分散比 (F)
水準間	125.919	2	62.95952	4.6460*
残差	284.581	21	13.55147	
合計	410.5	23		

*はＰ＝０．０５で有意の意味

以上に示したような分析方法を１要因分散分析（one way analysis of variance: one way ANOVA） といいます。

IV-3-2-2. 繰り返しのない２要因分散分析

次に１要因分散分析の結果を拡張して、要因が組み合わさっている場合、たとえば、飼っている魚の給仕量を５段階に変え、飼育温度を４段階に変えて、それぞれの組み合わせについて、３匹の魚を飼い、その成長率を比べた場合を、それぞれの要因が成長率に依拠しているかどうかを判定する場合に使われる分析を説明します。この場合、それぞれのレベルは、給仕量や温度のような連続変数である必要はなく、たとえば種の違いや、水槽の形状の違いでもかまいません。第一段階としてくり返しがない場合を考えます。つまり、魚が一匹しかいない。あるいは１水槽の全ての魚の成長の平均値を１データとするという例を考えてください。たとえば表 18 で、Ａは餌の種類で A_1、A_2、A_3 の３種類の餌、Ｂは水槽の形状で、B_1、B_2、B_3、B_4 の４タイプあり、成長に及ぼす餌、水槽の形状の影響の有無を論じたいというような場合です。

表 24 のようなデータがあったとします。このデータから分散を求め、分散を要因に取り分ける方法は、すでに説明しましたので、具体的な計算例を示します。

表 24. 2 要因分散分析の例

	A_1	A_2	A_3
B_1	11	11	8
B_2	10	13	19
B_3	9	18	18
B_4	14	18	19

２要因分散分析の実際の計算例

	A1	A2	A3	n	T_i	S_i	$\sum_{i=1}^{n}\frac{T^2}{n}$	$S_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{T^2}{n}$
B1	11	11	8	3	30	306	300	6
B2	10	13	19	3	42	630	588	42
B3	9	18	18	3	45	729	675	54
B4	14	18	19	3	51	881	867	14
n	4	4	4	12	168	2546	2430	116
T_i	44	60	64					
S_j	498	938	1110	2546				
$\sum_{j=1}^{n}\frac{T^2}{n}$	484	900	1024	2408				
$S_j-\sum_{j=1}^{n}\frac{T^2}{n}$	14	38	86	138		194		

以上より

$$全\,\mathrm{SS}=194$$

$$n_B SS_A=194-138=56$$

$$n_A SS_B=194-116=78$$

$$SS_r=194-56-78=60$$

分散分析表によって結果をとりまとめて示します。

表 25. 二要因分散分析の分散分析表

変動源	平方和 (SS)	自由度 (df)	平方平均* (MS)	分散比 (F)
A 群間	14	2	7	0.7
B 群間	26	3	8.6667	0.86667
残差	60	6	10	
合計	194	11		

IV-3-2-3. 繰り返しのある２要因分散分析

２要因分散分析を発展させれば３要因分散分析等、さまざまな形のデータを解析することが原理的に可能ですが、あまり複雑な形のものを分析しても結果の解釈に困るでしょう。最も単純な構造としては、１つの要因の中にいくつかの水準があり。もう一つの

表 26．繰り返しのある２要因データの例

	A_1	A_2	A_3
	10	8	6
B_1	11	12	8
	12	13	10
	9	12	18
B_2	9	12	19
	12	15	20
	8	15	17
B_3	9	19	18
	10	20	19
	13	14	18
B_4	13	19	19
	16	21	20

要因にいくつかの水準があり、それぞれの要因の組み合わせのセル内にいくつかの繰り返しがあるという構造が考えられます。表 26 に、要因Ａに３水準、Ｂに４水準、それぞれの組み合わせに３つの繰り返しという例を示しました。この場合、各セル内の平均値を求めて、先に示した繰り返しのない２要因分散分析を行っても良いのですが、繰り返しの数が増えると、統計的な検出感度が上がるはずです。できればこれを平均化せずに、個々のデーターを生かした形で分散分析を行いたいところです。

１つの要因に m 個の水準、もう一つの要因に n 個の水準、それぞれの組み合わせについて、 l 個の繰り返しという場合について考えます。

まず、に自由度について考えます。

全自由度は　　　　$mnl-1$

Ａ要因水準間　　　$m-1$

Ｂ要因水準間　　　$n-1$

（残差）自由度　　$(m-1)(n-1)$

残差自由度　　　　$mn(l-1)$

この表には、残差自由度と呼ばれるものが２つあります。このうち（残差）自由度　と書いた方は自由度の形から見て従来から検討に使ってきた残差です。水準間の自由度と（残差）自由度を足し合わせても全自由度になりません。この差を計算すると $mn(l-1)$ です。すなわち、説明できない分散に、２つの形のものがあることになります。繰り返しのある２要因分散分析は、数学的には３要因分散分析に近いものですが、それらの分析では必ず、残差がいくつかに分けられます。自由度の形を見ると、残差の自由度は、各セルの自由度にセルの数をかけたものです。つまり、各セル内の分散の総和に相当す

るものです。こちらのほうが本来の言葉の意味で、残差と呼ぶべきもので、一般には、従来の意味で残差と呼んできたものを交互作用（複数の要因が重なり合うことに生じた変動の意味）と呼んでいます。繰り返しのない２要因分散分析や、１要因分散分析では、これらを区別することはできないから、従来どおり残差と呼んでかまわないのではないかと思います。計算手順はいろいろありそうですが、一例を示します。

繰り返しのある２要因分散分析の計算例

	A_1	A_2	A_3	Sum	
B_1	10	8	6		
	11	12	8		
	12	13	10		
n	3	3	3	9	列の平方和
T	33	33	24	90	42
S	365	377	200	942	
$\frac{T^2}{n}$	363	363	198		
SS_{ij}	2	14	8	24	
B_2	9	12	18		
	9	12	19		
	12	15	20		
n	3	3	3	9	列の平方和
T	30	39	57	126	140
S	306	513	1085	1904	
$\frac{T^2}{n}$	300	507	1083		
SS_{ij}	6	6	2	14	
B_3	8	15	17		
	9	19	18		
	10	20	19		
n	3	3	3	9	列の平方和
T	27	54	54	135	180
S	245	986	974	2205	
$\frac{T^2}{n}$	243	972	974		
SS_{ij}	2	14	2	18	

B_4	13	14	18		
	13	19	19		
	16	21	20		
n	3	3	3	9	列の平方和
T	42	54	57	153	76
S	594	998	1085	2677	
$\frac{T^2}{n}$					
SS_{ij}	6	26	2	34	

T	132	180	192	全 T	504
N	12	12	12	全n	36
S	1510	2874	3344	全S	7728
SS	58	174	272	全SS	672
	行の平方和	行の平方和	行の平方和		

行の平方和	438			ImSS_B	234
列の平方和	504			InSS_A	168
				交互作用	180
				残差SS	90

まず全体の和（504)）、すべての２乗の和（7728）、すべてのデーター数(36)から、全 SS を求めます。

$$7728-\frac{504^2}{36}=672$$

次に各行の残差平方和（２４、１４，１８，３４）から残差平方和を求めます。

24+14+18+34=90

各行のごとに列の平方和を求めます。

Ｂ１の列については

$$942-\frac{90^2}{9}=42$$

すべての行について、行ごとの列の平方和を合計します。これは全平方和のうち、行の違いに由来しない平方和です。

42+140+180+46=438

同様にして列についての行の平方和を合計します。これは全平方和のうち、列の違いに由来しない平方和です。

58+174+272=504

全平方和から行に由来しない平方和を差し引き行に由来する平方和を差として求めます。

$$672-438=234$$

$$3 \times 3 \times SS_B = 234$$

$$SS_B = 26$$

同様に, 全平方和から列に由来しない平方和を差し引き列に由来する平方和を差として求めます。

$$672-504=168$$

$$3 \times 4 \times SS_A = 168$$

$$SS_A = 14$$

全平方和から、行に由来する平方和、列に由来する平方和、残差平方和を差し引いて、交互作用による平方和を求めます。

$$672-234-168-90=180$$

$$3 \times SS_{interaction} = 180$$

以上の数値より下記の分散分析表が得られました。

表 27. 表 26 に示した計算例の分散分析表

変動源	平方和 (SS)	自由度 (df)	平方平均* (MS)	分散比 [1] (F)	分散比 [2]
A 群間	14	2	7	1.86667	0.7
B 群間	26	3	8.6667	2.31112	0.86667
交互作用	60	6	10	2.66667*	
残差	90	24	3.75		
合計		**35**			

分散比の欄には交互作用で割った分散比と、残渣分散で割った分散比の両方を載せました。二どちらの分散比を検定に用いればよいのかと言う問題があります。いろいろな場合があるので、一概に結論付けられませんし、どうすれば良いのか、筆者もいつでも的確に判断できるわけではありません。それについて、少し解説します.この場合は交互作用があります。交互作用が大きいので、交互作用との比として表した F 値は相対的に小さくなります。

IV-3-2-3. 交互作用と残渣

交互作用があるときには、２要因分散分析をやめて、どちらかの要因の１のレベル（つまり一つの行とか列）について、１要因分散分析をするべきだされています。確かに、それが妥当な場合もありますが、あまり機械的に考えない方が良いと思います。交互作用が有意であれば、いつでも、２要因分散分析に意味がなくなるわけでもありません。大切なことは、データ全体としてどのようになっているかを確認することです。実用的ではありませんが、意図的の作られたデータセットを使って、思考実験をします。

分析したのは、表 28 のデーターで、前項で用いたデータと同様に、IV-2-1.分散の分離で用いた繰り返しの内２要因のデータに（表 30）にランダムな変動を加えたもので、前項の分析に用いた人工的にデータに比べてランダムな変動が１０分の１になっています。

表 28.繰り返しのある２要因分散分析の例

	A_1	A_2	A_3
B_1	3.8	6.9	7.3
	3.4	6.8	7.8
	3.0	7.3	7.7
B_2	7.3	10.8	11.9
	6.8	10.6	12.6
	6.6	11.0	12.4
B_3	7.7	12.2	13.2
	7.6	12.2	12.9
	7.8	12.2	13.2
B_4	10.1	13.9	14.9
	9.9	13.9	14.7
	10.0	14.2	15.4

表 29 繰り返しのある２要因分散分析の分散分析表

変動源	平方和 (SS)	自由度 (df)	平方平均 (MS)	分散比 [1] (F)	分散比 [2] (F)
A 群間	14	2	7	103.7037	70
B 群間	26	3	8.6667	128.3956	86.667
交互作用	0.6	6	0.1	1.4811	
残差	1. 62	24	0.0675		
合計	405.42	35			

1: $\frac{\sigma}{\sigma_{residual}}$　2: $\frac{\sigma}{\sigma_{interaction}}$

表 30. 残渣と交互作用を含まないデータ

	A1	A2	A3
B1	2	6	7
B2	6	10	11
B3	7	11	12
B4	9	13	14

ランダムな変動１０分１にすると、交互作用分散も残渣の分散も小さくなって、この場合は、交互作用も有意でなくなりました。ここで、分析したデータをグラフに書いてみます。黒いバーは、残差によるデータの広がりを示しています。こういう図では、データーのバラつきを標準偏差の長さのバーで示しますが、表 27 の例では図 33 のようにこのバーの長さが長くて、表 28 の例では、図 34 のようにバーの長さが認識できないぐらい小さくなります。次に、交互作用として加えたデータを十倍にしてみます。データが １０倍になれば、分散は１００倍に、交互作用と要因の分散比は１００分の１になります。

$$F_{A-interactio} = 0.7$$

$$F_{B-interaction} = 0.86667$$

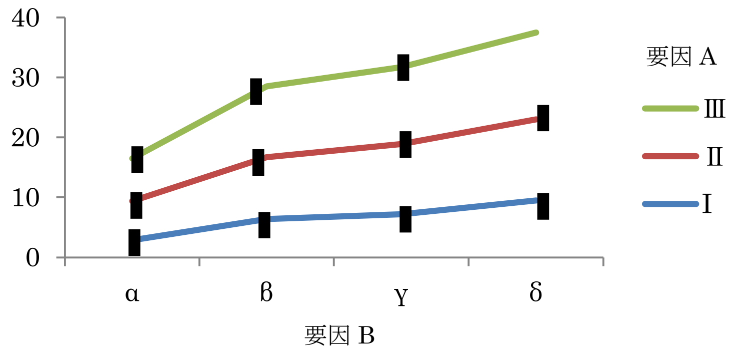

図 33. 繰り返しのある２要因分散分析のグラフ例１

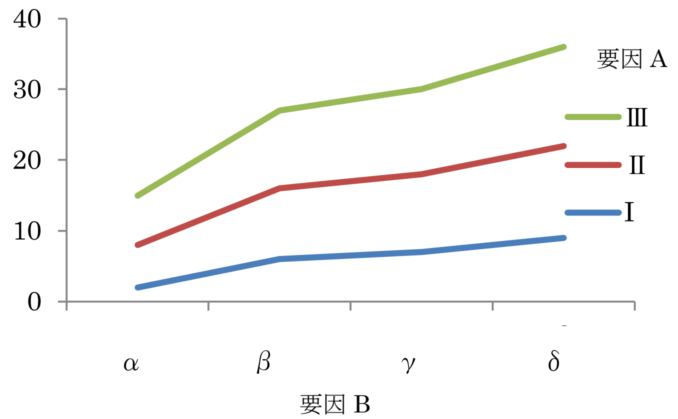

図 34. 繰り返しのある２要因分散分析のグラフ例２

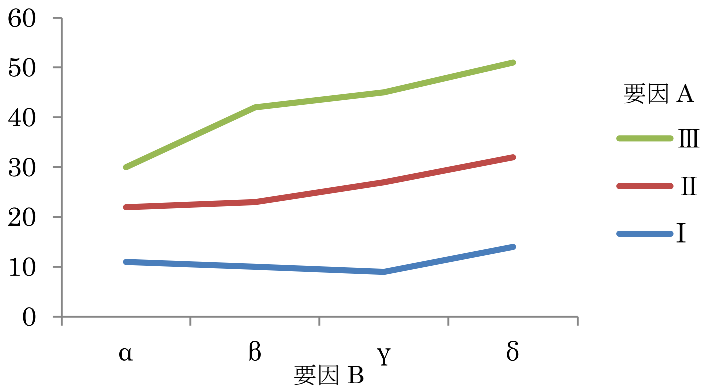

図 35. 繰り返しのある 2 要因分散分析のグラフ例 3

その結果として、交互作用は有意に、交互作用の分散に対する要因の分散比は有意でなくなります。交互作用を大きくすると、各要因の組み合わせの平均値も変わりますから、データを図 35 のように図示してみました。要因ごとにその変化を見ると、AⅢと AⅡには要因 B の影響が見えますが、AⅠについてみると、要因 B の影響はほとんどないように見えます。この場合、要因 B は常にデータに違いをもたらす主要な要因だとは言いにくいでしょう。正確には、AⅢの時には要因 B の影響が顕著にみられるが、AⅠの時には要因 B の影響がないと結論すべきです。交互作用が有意であった場合には、ここで示したように、グラフを作って交互作用の内容がどんなものかを確認します。そのあと、どのようにすればよいかは、統計学の問題ではありません。どうすべきかを知っているのは、専門知識・経験を持っている分析者自身です。グラフを作れば、その変動の意味がわかり、何を論ずべきかが決まると思います。