Ⅳ-3-3. 単回帰分析と相関

複数の確率変数があり、それらが独立ではなく、何らかの関係を持って変動している時、それらの関係を表す式を作ることを回帰(Regression)と言います。特に確率変数が２つだけで、１次式でその関係が表せる時には、その回帰を単回帰、直線回帰（linear regression）と言います。具体的な例をあげると、図 36 に示した散布図をみるとＸとＹの間に何か関係がありそうに見えます。その関係を表す代表的な直線を図の中に引くにはどうしたらよいかということです。

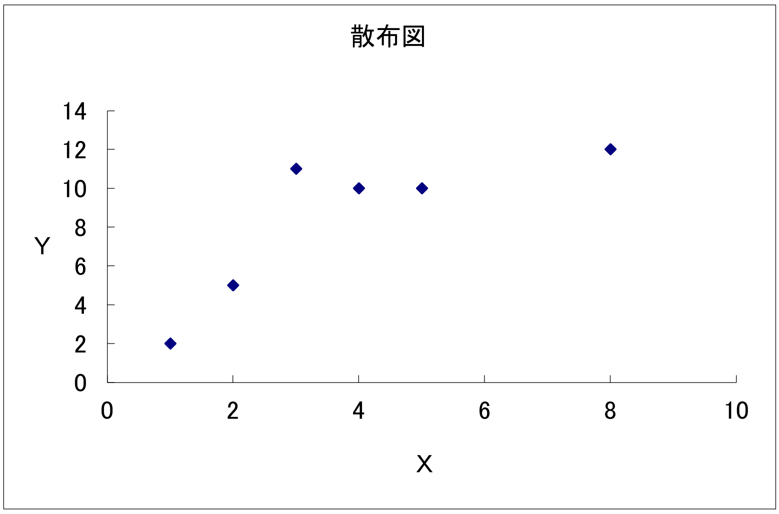


図 36 散布図

このデーターを表で表したものが表 31 です。表の左のカラムには、ＸＹのデーターセットの番号を記しました。

表 31 単回帰分析の例

No	X	Y
1	1	2
2	2	5
3	3	11
4	5	10
5	8	12
6	4	10

分析するのは図 36 で、ぼんやりと左から右上がりの直線を中心にしてデーターが散布しているように見えるということは、どのくらい妥当であるのか。また、直線が引けるとすればその直線の式はどのようになるのかということです。

実は、このことは、IV-2-2 で取り扱った和の分散、差の分散に加えて積の分散（共分散）を論じていることになるのですが、共分散を単独で論ずるよりは、回帰という具体的な問題を取り扱う方が、かえって共分散という概念を理解しやすいので、単回帰の中で共分散を取り扱います。

仮に仮想的な直線の式を

$$y = bx + a$$

とする。

いつもの例に倣って、y と x の平均値を M_y、M_x

yとxの偏差をそれぞれ　e_{yi}、e_{xi}　（i は y と x のデーターセットの番号で i=1 から n まで）とあらわし、$\bar{y}_i$を$y = bx + a$を用いて x_i から予測される y の値とします。

$$\bar{y}_i = bx_i + a$$

$$y_i - \bar{y}_i = r_i$$

とすると、r_iはxによって説明されない y の残差です。

$$y_i = M_y + e_{y_i}$$

$$x_i = M_x + e_{x_i}$$

ですから、r_iは次のように書けます。

$$M_y + e_{y_i} - a - b(M_x + e_{x_i}) = r_i$$

変形して

$$M_y - bM_x - a + e_{y_i} - be_{x_i} = r_i$$

平均値では$y = bx + a$が成り立っているとすれば、

$$M_y - bM_x - a = 0$$

ですから

$$e_{y_i} - be_{x_i} = r_i$$

となり、この残差の平方和を考えます。

$$\sum_{i=1}^{n} {r_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(e_{y_i} - be_{x_i}\right)^2$$

これを展開して

$$\sum_{i=1}^{n} {r_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} {e_{y_i}}^2 - 2b\sum_{i=1}^{n} e_{x_i}e_{y_i} + b^2\sum_{i=1}^{n} {e_{x_i}}^2$$

第 1 項と第 3 項については、すでに和の分散、差の分散の考察を行ってきたそれぞれの

変数の分散です。第２項はいままでなじみのないものです。第２項の係数を除いた部分 $\sum_{i=1}^{n} e_{x_i} e_{y_i}$ を自由度で割った値は共分散（covariance）と呼ばれるものです。この項は y が x と関係して変化するために生じた項であり、ためしに、y が x とまったくかかわりを持たないものとして

$$\sum_{i=1}^{n} e_{x_i} e_{y_i} = 0$$

とすれば、

$$\sum_{i=1}^{n} {r_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} {e_{y_i}}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(b e_{x_i}\right)^2$$

となり

$$SS_{y+bx} = SS_y + SS_{bx}$$

というわれわれが使い慣れてきた式に帰着します。

また、y が a+bx という式で完全に説明される、言い換えれば、y がすべて y=a+bx 直線上に集まっているとすれば

$$e_{y_i} = b e_{x_i}$$

ですから

$$\sum_{i=1}^{n} {r_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(e_{y_i} - b e_{x_i}\right)^2 = 0$$

となり、確かに残差はなくなります。

これらは極めて重要な情報ですが、先を急いで、bの最適値の求め方にもどります。

数学の問題としては

$$\sum_{i=1}^{n} {r_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} {e_{y_i}}^2 - 2b \sum_{i=1}^{n} e_{x_i} e_{y_i} + b^2 \sum_{i=1}^{n} {e_{x_i}}^2$$

という式で $\sum_{i=1}^{n} {r_i}^2$ を最小にするbを求めるということです。２次関数の最小値の問題ですから解き方は何通りもあります。好きな方法で解けばよいでしょう。場合によっては、Excell　の solver をつかって最小値を与えるbを計算させればよいかもしれません。一般的には、極値の求め方で、微分式を０とする b を求めるのが普通でしょう。できるだけ簡単な方法で解くというのがこの解説の基本方針です。そこで、ここでは微分を知らない中学生のために、２次関数の最小問題の解法を用います。

式を簡略化するために記号を用います。

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^{n} e_{x_i} e_{y_i}$$

とあらわすことにします。

$$\sum_{i=1}^{n} {r_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} {e_{y_i}}^2 - 2b \sum_{i=1}^{n} e_{x_i} e_{y_i} + b^2 \sum_{i=1}^{n} {e_{x_i}}^2$$

$$= SS_y \pm 2bSS_{xy} + b^2 SS_x$$

$$= SS_x \left(b - \frac{SS_{xy}}{SS_x} \right)^2 + SS_y - \frac{{SS_{xy}}^2}{SS_x}$$

以上より、与えられた式の値を最小にする b の値は、

$$b = \frac{SS_{xy}}{SS_x}$$

その時の残差平方和は

$$SS_y - \frac{{SS_{xy}}^2}{SS_x}$$

です。

bが求まればaも求まるでしょう。これで話は終わりのようですが、統計の解説なのでそれぞれの予測値がどのよう確率的な幅をもっているかを検討しておく必要があります。

ｙのもともとの平方和は SS_y ですから、次式によって、回帰式によってどのくらい残差平方和が減ったことになるのかが表せるでしょう

$$SS_y - \left(SS_y - \frac{{SS_{xy}}^2}{SS_x} \right) = \frac{{SS_{xy}}^2}{SS_x}$$

これをｙの全体の SS_y で割ればｂという係数を偏差に乗ずることによって、どのくらい残差の分散が小さくなるか、その割合がわかることになります。これを寄与率（contribution rate）r^2 といい次式で計算できます。

$$r^2 = \frac{{SS_{xy}}^2}{SS_x SS_y}$$

式 44

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_x}\sqrt{SS_y}}$$

式 45

ｒには相関係数(correlation coefficient)と言う名前がついています。

一方、$SS_y - \frac{{SS_{xy}}^2}{SS_x}$は平方和ですから自由度で割れば、残差分散が計算できます。n 個の値を持つ２個のデータ群から合成した値なのでこの自由度はｎ－２です。

$${\sigma_y}^2 = \frac{1}{n-2}\left(SS_y - \frac{{SS_{xy}}^2}{SS_x}\right) = \frac{1-r^2}{n-2}SS_y$$

この分散は、予測された直線（この直線の統計学的な名称は回帰直線という。）の周りのｙ値の母集団の２次の積率（バラツキ・広がり方の度合い）です。

ｙの母集団の平均値が０である可能性を検討するのであれば、その標準誤差は$\frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}$

ですから、以下のようにしてｔの観測値ｚを求め、n-2 のｔ分布表の臨界値と比較すればよいでしょう。

$$\mathrm{z} = \frac{M_y}{\frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_j}{n}}{\sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_j}{\sqrt{n}\sigma_y}$$

しかしこれは、実際にあまり意味のある検定ではありません。ｙの平均値が０であるかないかは誰の目にも明らかですし、もしその必要があるとしても、観察されたｙの値から平均値を求め、その標準誤差から、ｙの平均値の予測値が０を含む可能性について検討すればよいからです。わざわざこんな面倒なことはしないでしょう。しかし、これをｘの特別な値の点についての予測値についての信頼性の検討に用いるならば多少の意味があるかもしれません。たとえば、ｘ＝０の点のｙの値、ｙ切片の信頼限界について考えてみます。まず、ｙ切片の予測値が必要であるから、今まで、問題にしてこなかった y=a+bx という仮想的な式（回帰式）のａの値の予測値について考えます。回帰式を仮想的に考える時点で、ｙとｘの平均値を通るものとしてこの値を考えた、つまり、原点を x,y の双方の平均値の座標（M_x,M_y）に移動させて、式の傾きのみに着目して、考察を行ってきたのですから、この推定値はｙの平均値 $M_Y - b M_X$であることは直感的に予想されます。念のために代数的に確認すます。

$$\overline{y_i} = a + bx_i$$

$$y_i - \overline{y_i} = r_i$$

ですから

$$y_i - (a + bx_i) = r_i$$

$$y_i = r_i + (a + bx_i)$$

$$y_i = e_{y_i} - be_{x_{i_i}} + b\left(e_{x_i} + M_x\right) + a$$

$$y_i = e_{y_i} + bM_x + a$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} e_{y_i} + n(bM_x + a)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n(bM_x + a)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = bM_x + a$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - bM_x = M_y - bM_x$$

証明終わり

ｙ切片が$M_y - bM_x$で与えられるとすると､ｙ切片の予測値の積率はｙの分散に等しいから、たとえば、予測された１次式 y=a+bx が原点を通らない。すなわち a=0 であることの検定は

$$\mathrm{z} = \frac{M_y - bM_x}{\frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}}$$

として、Ｎ－２の自由度でｔ検定すればよいことになります。でも、それは誤りです。なぜならば、母集団から抽出したデーターによって変動するのはのa推定値だけではないからです。回帰直線の傾きbもaとは独立にデーターによって変動します。ｙ切片の値とは、ｘ＝０の時のｙの予測値であり、これらは、a、b両方の値の変動によって変動すします。したがってその予測値の真の値のまわりの２次の積率は両方を考慮しなければならないことになります。そこで、aについての検討をいったん中断してbの予測値の変動について考えます。

bの値の変動について考えることは､aの値の予測値の変動を考えることに比べてはるかに意味があります。そもそも、aの値の変動について予測し、その妥当性について検討するということは、視点を変えれば、母集団の回帰式が本当に０を通るのならば、データーから作ったｙ切片の推定値が$M_y - bM_x$となることがあるかと聞いているのとおなじです。その答えとして、母集団の回帰式が０を通る時には 95%の確率で$M_y - bM_x$ の値にはならない。という答えが得られたとしてもあまりうれしくはないでしょう。「ある確率でｙ切片は０であり、回帰直線が原点を通る。」と言える方法があるのならまだしも、帰無仮説が否定できなかった場合には、回帰直線が原点を通る可能性については何もいえないし､帰無仮説が否定されたとしてもせいぜい原点を通らないということがいえるだけでそんなことは回帰直線の値から概ね予想がつきます。たぶん､多くの場合、人々が関心を持つのは「xとyには関連があるのか」ではないでしょうか。知りたいことは$r = 0$であるかどうかでしょう。これを相関の検定といいます。

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_x}\sqrt{SS_y}}$$

であり、$\sqrt{SS_x}$、$\sqrt{SS_y}$ともに０でないことは大前提ですから、$r = 0$の可能性について検

討することは$SS_{xy}=0$の可能性について検討すると同じことで、また共分散が０であることとも同じです。さらに言えば

$$b=\frac{SS_{xy}}{SS_x}$$

ですから、$b=0$、つまり傾きが０であることの可能性についての検討でもあります。bの予測値が$\frac{SS_{xy}}{SS_x}$ですから。$b=0$と$b=\frac{SS_{xy}}{SS_x}$の差$\frac{SS_{xy}}{SS_x}$　を真のb（ｂの予測値）のまわりの積率で割って、その値をｚをｔの臨界値と比較すればよいことになります。

私たちが考え出さなければならないのは、真のｂまわりの積率の求めかたです。この場合、分散分析で、標本集団から推定される平均値が母集団の周りにどのように分布するかを考えた経験が役に立つでしょう。私たちはそれを、母集団の２次積率の推定値であるσ^2を個々のデーターに基づく期待値として計算することによって行いました。この場合にも同様の考え方ができるでしょう。

x_i, y_iの１つのデーターセットから得られるｂの値の予測値を

$$b_i=\frac{e_{y_i}}{e_{x_i}}$$

として（xとy平均値を原点として偏差を考えるので、傾きになります。)、この値と全体から得られた

$$b=\frac{SS_{xy}}{SS_x}$$

との差について論じることにします。

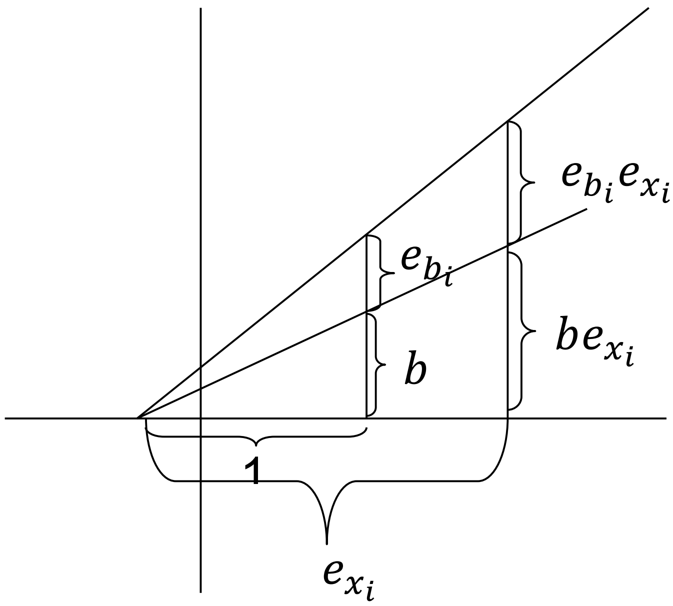


図 37. 傾きと変数の偏差

図 37 に示したとおり、回帰式の傾きbとはxが１増加した時のyの増加分のことです。また、e_{b_i}はbの値の偏差で、傾き$b_i = \frac{e_{y_i}}{e_{x_i}}$はその拡大率ですから、それを$e_{x_i}$倍した値が$y_i = bx_i$から予想される$y$の値からの偏差となります。

$$e_{y_i} = e_{b_i} e_{x_i}$$

$$e_{b_i} = b_i - b = \frac{e_{y_i}}{e_{x_i}} - \frac{SS_{xy}}{SS_x} = \frac{1}{e_{x_i}}\left(e_{y_i} - \frac{SS_{xy}e_{x_i}}{SS_x}\right)$$

$${e_{b_i}}^2 = \frac{1}{{e_{x_i}}^2}\left(e_{y_i} - \frac{SS_{xy}e_{x_i}}{SS_x}\right)^2$$

これは、x_i, y_iから予測されるbの値と真の値の隔たりです。平均値の予測値の２次の積率では、この値にその値をとる確率を乗じて、その積の総和として、積率を求めました。ここでも、${e_{b_i}}^2$となる確率を考えればよいでしょう。それぞれの値となる確率はすべて等しいように思われます。確かに、観察されたデーターが観察される確率はすべて同じと考えるべきなのですが、ここで、問題にしているbの予測値は、xの値を１に基準化した時、つまり、縮小したり拡大したりした時のbの値です。${e_{x_i}}^2$の絶対値と${e_{b_i}}^2$の価は反比例することがわかるでしょう。つまり、より平均値に近いxの値の変動は、bの値を大きく変動させ、遠いxはbの値はあまり変動させません。したがって、重みづけして数値を補正して、総和を求めなければなりません。この場合２乗しているので、$\frac{{e_{x_i}}^2}{\sum_{i=1}^n {e_{x_i}}^2}$をそれぞれの値にかけて、合計して期待値を計算します。

$$SS_{b_i} = \sum_{i=1}^n \frac{{e_{x_i}}^2}{\sum_{i=1}^n {e_{x_i}}^2} {e_{b_i}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n {e_{x_i}}^2} \sum_{i=1}^n {e_{x_i}}^2 {e_{b_i}}^2 = \frac{1}{SS_x} \sum_{i=1}^n \left(e_{y_i} - \frac{SS_{xy}e_{x_i}}{SS_x}\right)^2$$

$$\left\{\because \quad {e_{b_i}}^2 = \frac{1}{{e_{x_i}}^2}\left(e_{y_i} - \frac{SS_{xy}e_{x_i}}{SS_x}\right)^2 \qquad 式**\right\}$$

$\sum_{i=1}^n \left(e_{y_i} - \frac{SS_{xy}e_{x_i}}{SS_x}\right)^2$を展開します。

$$\sum_{i=1}^n \left(e_{y_i} - \frac{SS_{xy}e_{x_i}}{SS_x}\right)^2 = \sum_{i=1}^n {e_{y_i}}^2 - 2\frac{SS_{xy}}{SS_x}\sum_{i=1}^n e_{x_i}e_{y_i} + \frac{{SS_{xy}}^2}{{SS_x}^2}\sum_{i=1}^n {e_{x_i}}^2$$

$$= SS_y - \frac{{SS_{xy}}^2}{SS_x}$$

$$\left\{\because \quad \sum_{i=1}^n {e_{y_i}}^2 = SS_y \ , \quad \sum_{i=1}^n e_{x_i}e_{y_i} = SS_{xy} \ , \quad \sum_{i=1}^n {e_{x_i}}^2 = SS_x\right\}$$

$$= (n-2){\sigma_y}^2 = (1 - r^2)SS_y$$

$$\left\{\because \quad {\sigma_y}^2 = \frac{1}{n-2}\left(SS_y - \frac{{SS_{xy}}^2}{SS_x}\right) = \frac{1-r^2}{n-2}SS_y \qquad \text{式 } 56\right\}$$

したがって

$$SS_{b_i} = \frac{SS_y}{SS_x}(1-r^2)$$

これを自由度で割って

$$ {\sigma_b}^2 = \frac{(1-r^2)SS_y}{(n-2)SS_x}$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{(1-r^2)SS_y}{(n-2)SS_x}}$$

これは、予測値の真の値のまわりの２次の積率を求めたものですから、これは標準誤差です。これを標準誤差として０とbの推定値の距離すなわち$b = \frac{SS_{xy}}{SS_x}$をわって、

$$\mathrm{z} = \frac{SS_{xy}}{SS_x}\sqrt{\frac{(n-2)SS_x}{(1-r^2)SS_y}} = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_x SS_y}}\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$$

の値を求め、自由度を n-2 としてこの値を, t の臨界値と比較すればその優位性が検定できます。これは、相関の有無を問うていることになるので、それなりに意味がある検定かもしれません。

ここで再びy切片の予測値の母集団のy切片のまわりの２次の積率に話を戻します。傾きbの予測値の２次の積率の議論で示したとおり、xの平均値から遠ざかるにつれて、bの値の変動の影響は大きくなります。y切片とは、$x = 0$の時のyの値ですから、平均値から平均値（M_x）分隔たっています。したがって傾きの偏差に由来する偏差は、

$$M_x \frac{\sigma_y}{\sqrt{SS_x}}$$

分散は

$${M_x}^2 \frac{{\sigma_y}^2}{SS_x}$$

これに、ｙの値の予測値の２次の積率（$\frac{{\sigma_y}^2}{n}$）が加わるので、

y切片の予測値の母集団のy切片の値のまわりの積率は

$$\frac{{\sigma_y}^2}{n} + {M_x}^2\frac{{\sigma_y}^2}{SS_x} = {\sigma_y}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{{M_x}^2}{SS_x}\right)$$

標準誤差は

$$\sigma_y\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{{M_x}^2}{SS_x}}$$

となります。この値で予測されたy切片の値を割ってＺを求め、自由度 n－２として t 検定を行えばよいでしょう。この方法を用いれば、与えられたxに対するyの誤差範囲も求めることができます。

そのほか、２つの回帰直線の傾きを比較するなど様々な検定が考えられますが、それらも、上記のような方法で、標準誤差を計算したり、あるいは２つの分散を込みにした分散を考えるなどすれば、妥当な解析方法を導き出せるはずです。

回帰分析は意外と頼りない

回帰に関してはもっと論じておかなければならないことがあります。

１. 飛び離れ値の問題

下の表に示したｘ、ｙが対になったデーターがあります。これらのデーター間に相関があるかないかを論じます。

表 32, 飛び離れ値のある回帰分析

X	Y
2	1
3	5
5	5
1	3
5	1
20	22

回帰分析をする前に当然、グラフを作ってみるでしょう。図 38 にそのグラフを示します。確かに相関があるように見えます。実際、相関係数を計算してみると。r=0.956 で、

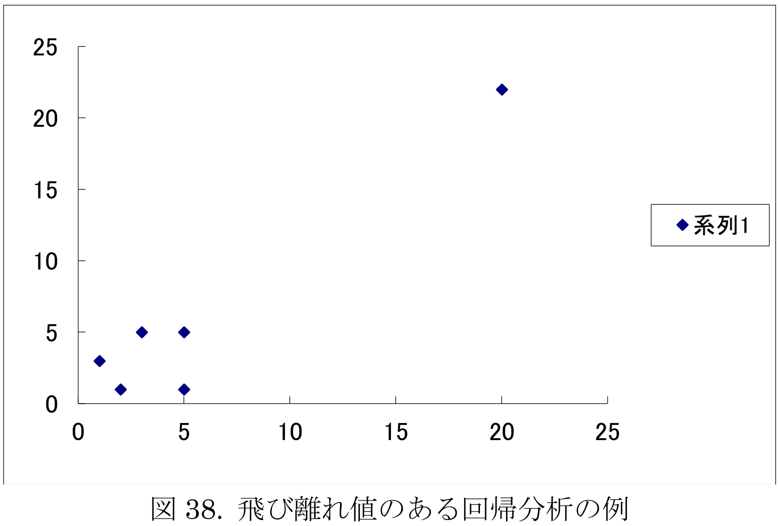


図 38. 飛び離れ値のある回帰分析の例

5%以下の危険率で相関は有意になります。たしかに、グラフを見ると、全体としては相関がありそうですが、右上の飛び離れた値を取り除いてみると、他の５つのデーターの間には相関がありそうには見えません。ためしに、この５つのデーターだけで回帰分析を行ってみると。r=0.140 でほとんど相関は見られません。右上の飛び離れたデーターのために、全体として相関があることになったのです。実際、このような場合、右上のデーターを取り除いて、解析を行うべきなのか、右上のデーターを加えて解析を行うべきなのか、統計学は教えてはくれません。どうして飛び離れ点が出来たのかを考えなければなりません。それを知ることが出来るのは、統計学ではなくて、研究を行っている当の研究者本人です。
平均値から離れたデーターが大きな影響を持ってしまうのは、この解析で用いているのが最小２乗法による近似を用いているためでもあります。ここでは、わかりやすさを重視して、誤差を最小化する最小２乗法で回帰しました。最近では、確率を最大化する最尤法で近似する方が一般化しているのかもしれません。最尤法には、離れたデーターほど影響量が強くなるという問題がありません。しかし、少し計算が複雑になります。

相関係数の幾何学的な意味
回帰分析と相関分析とは目的が異なります。回帰分析は、因果関係を持つことがあらかじめ分かっている時に、直線関係を前提に、具体的な関係を示そうとするものです。相関分析が問題にしているのは相関関係があるか否かです。相関関係があっても因果関係があるとは限りません。たとえば、天気が良いと洗濯物が良く乾き、外出する人が多くなります。ですから、洗濯物の乾き方と外出する人の人数には相関関係があります。しかし、洗濯物が乾くから外出する人が多いわけでもないし、外出する人が多いから洗濯物が乾くわけではありません。この場合、相関関係があっても因果関係があるわけではありません。それぞれの分野におけるメカニズムの解明がなければ、因果関係の有無を論ずることはできません。しかし、それでも、数学的にはどちらも相関係数が判断上の重要な指標になっているという意味では共通性がありますので、この項目の最後で、相関係数の幾何学的な意味について考えます。x_i, y_iというペアになったデータが n 個ります。今までの説明では、図 39 のような、$x-y$の２軸で表される平面上の点としてそれぞれのペアを認識していました。

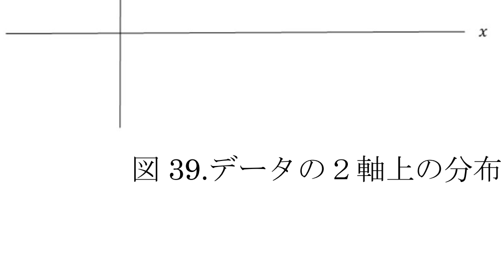


図 39.データの２軸上の分布

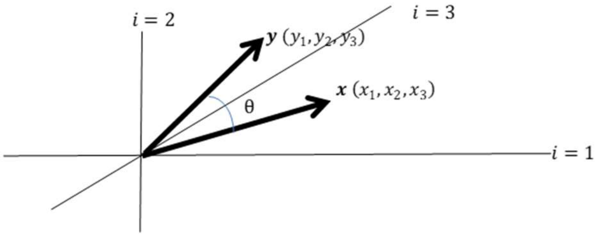


図 40.データのベクトル表現

視点を変えると、これらでデータをn個の直交する軸で構成されるn次元平面上のベクトルととらえることができます。n次元ですから図示することができませんが、３次元で書けば図 40 のようになります。

ベクトル$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$が作る平面上で、２つのベクトルがなす角度はθです。

n次元のベクトルの内積は、次の二つの式で表現できます。

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = SS_{xy}$$

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|\cos\theta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}\cos\theta = \sqrt{SS_x}\sqrt{SS_y}\cos\theta$$

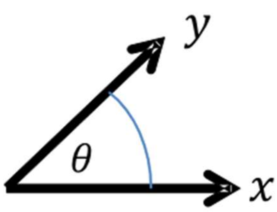
この２つの式から

$$SS_{xy} = \sqrt{SS_x}\sqrt{SS_y}$$

$$\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_x}\sqrt{SS_y}} = r$$

つまり、相関係数とは 2 つのベクトルがなす角度です。



重回帰分析などの多変量の分析では、このことは応用的にも理論上も重要な意味を持ちますが、ここでは深く立ち入りませんが、知識として覚えておいてください。

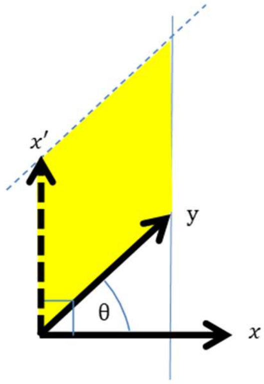


図 40. 内積の図形的な意味

ちなみに、筆者は内積を上の図の黄色い２平行四辺形の面積だと思っています。このひし形の面積をベクトルの長さの積で割ったものが、相関係数ですから、相関係数は平行四辺形のつぶれ方です。完全につぶれてしまうと黄色いひし形の面積は０になります。つまり、$r = 0$です。相関係数をこんな図形で記憶してもよいかもしれません。

どこかで習ったかもしれませんが、このことは、次の不等式（コーシー・シュワルツの不等式）の幾何学的な証明にもなっています。

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\delta^2+\varepsilon^2+\zeta^2) \geq (\alpha\delta+\beta\varepsilon+\gamma\,\zeta)^2$$

ベクトルを学習するとわかりますが、左辺のそれぞれのカッコの中は、ベクトルの長さの２乗です。左辺全体としては、２つのベクトルの長さの積の２乗です。右辺は内積の２乗です。下のように書く方と、感覚的にわかりやすいかもしれません。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \\ \zeta \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$の範囲で考えているので、$0 \leq \cos\theta \leq 1$

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \geq \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\sqrt{\delta^2+\varepsilon^2+\zeta^2} \geq \alpha\delta+\beta\varepsilon+\gamma\,\zeta$$

式 46