V. 線形代数学の基礎（行列計算）

V-1.　行列演算の基礎

V-1-1.　行列とは

捉え方によって、行列と行列式には様々な意味がありますが、とりあえず初めての段階では、連立方程式を機械的に解くための算術（計算法）だと考えれば良いでしょう。将来、もっと広がりのある多様な意味を持っていることを知ることになりますが、それを初めに考えると、かえってわかりにくいと思います。歴史的にも算術として発展してきた時期がありました（たとえば関孝和の和算）。ということで、まず算術として説明します。

最も単純な例から考えたいので下の連立方程式を考えます。

$$ax + by = \alpha$$

$$kx + ly = \beta$$

これを　行列で表すと

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ kx + ly \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

と表せます。この左辺を２つの行列の積として表すと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

となります。カッコでくくられたものが一つの行列です。良くわからないかもしれませんが、ここではそういうものだと思っておいてください。連立方程式の簡潔な表し方を覚えたぐらいのつもりで良いでしょう。

このやり方だと、たとえば

$$ax + by + cz = \alpha$$

$$kx + ly + mz = \beta$$

$$sx + ty + uz = \gamma$$

は

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

となります。案外便利でしょう。

ここで、

$$ax + by = \alpha$$

$$kx + ly = \beta$$

にもどって、この連立方程式を解いてみます。

$$akx + bky = k\alpha$$

$$akx + aly = a\beta$$

$$(bk - al)y = k\alpha - a\beta$$

$$y = \frac{k\alpha - a\beta}{-(al - bk)}$$

これを

$$ax + by = \alpha$$

に代入

$$ax + b\frac{k\alpha - a\beta}{-(al - bk)} = \alpha$$

$$ax = \alpha + b\frac{k\alpha - a\beta}{al - bk}$$

$$ax = \frac{al\alpha - bk\alpha + bk\alpha - ab\beta}{al - bk}$$

$$ax = \frac{al\alpha - ab\beta}{al - bk}$$

$$x = \frac{l\alpha - b\beta}{al - bk}$$

となって答えは

$$x = \frac{l\alpha - b\beta}{al - bk}$$

$$y = \frac{-(k\alpha - a\beta)}{al - bk}$$

ここで突然ですが、この二つの式の右辺の分母は、行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}$$

の行列式です。行列式とは行列の大きさを表す値です。数式としては次のように表します。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}$$

行列式が一体何の大きさなのかは後で説明します。具体的な計算式は、次の通りです。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} = al - bk$$

行列式を使って答えを書くと

$$x = \frac{l\alpha - b\beta}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{-(k\alpha - a\beta)}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}}$$

ここに挙げたのは、二元の連立方程式の例です。三元になれば、

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

となって、

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix} = alu + bms + ckt - amt - bku - cls$$

と計算します。これは３ｘ３の行列式です。一般にｎ×ｎの行列式の計算の仕方を知りたいところですが、それは単なる計算法に過ぎないから、計算方法についてはあとで触れることにします。大切なのは、行列の計算がどんな考え方にもとづいているのか、どんなことを表しているのかを感覚的につかむことです。

１元の方程式を考えてみましょう。

$$ax = \alpha$$

のように表し、

$$x = \frac{\alpha}{a}$$

と計算します。

同じようにｎ元１次の連立方程式を

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\alpha}$$

のように簡潔に書き表したいのです。

先ほどの３元の連立方程式の場合は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

として

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\alpha}$$

ということです。こうしておけば、３元１次の連立方程式を簡単に一行で書き表せます。

記法が簡便になったのだから、計算もこの形のまま簡便にやることを考えたくなります。

１元の方程式の時は

$$ax = \alpha$$

$$x = \frac{\alpha}{a}$$

xの係数aで右辺を割って答えを出しました。これを別の言い方に変えると、両辺にaの逆数a^{-1}を掛けたということになります。

計算としては次の通りです。

$$ax = \alpha$$

$$a^{-1}ax = a^{-1}\alpha$$

$$1 \cdot x = a^{-1}\alpha$$

$$x = \frac{\alpha}{a}$$

と計算しています。つまり

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

の逆数に相当するものを考えて、それを両辺にかけて、左辺の係数が１のような何かの単位のようなものになれば良いわけです。やらなければいけないことは、

１．行列の掛け算のやり方を決める。

2. 逆数に相当するものを考える。

3. 単位のようなものを考える。

以上の３つです。逆数に相当するものを逆行列、単位に相当するものを単位行列という名前を付けておきましょう。

複雑なものは考えにくいので。最も単純な２元連立方程式の例について考えます。

答えは

$$x = \frac{l\alpha - b\beta}{al - bk}$$

$$y = \frac{-(k\alpha - a\beta)}{al - bk}$$

です。

逆行列をA^{-1}*とすると*

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$*は良くわからないけれど、実数の１のように左辺を*$\boldsymbol{X}$*だけにするものだから、*

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

となるはずです。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{l\alpha - b\beta}{al - bk} \\ \dfrac{-(k\alpha - a\beta)}{al - bk} \end{pmatrix}$$

この分母は行列式だからこれを外に取り出すと

$$= \frac{\begin{pmatrix} l\alpha - b\beta \\ -(k\alpha - a\beta) \end{pmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ k & l \end{bmatrix}}$$

括弧の中のαとβを取り除くと、

$$\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}$$

となるので、計算ルールは

$$\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\alpha - b\beta \\ -k\alpha + a\beta \end{pmatrix}$$

となって、逆行列は

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ k & l \end{bmatrix}}$$

となります。これらを使えば、

$$\boldsymbol{AX} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

という計算を

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$I\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

という形で解けることがわかります。