V-1-2. 行列計算の基礎

V-1-1では行列の使われ方の１例を示して、行列がどんなものなのかを説明しましが、実際には行列はもっと多様な使われ方をします。それらを説明する前に、まず、行列計算のルールを知らなくてはなりません。この項では、線形代数学的な四則演算のルールを説明します。

1. 行列の和

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

式 48

- この計算ルールの妥当性の説明

まず、 2 行 2 列 の行列の例で説明します。

2 行 2 列の行列にこのルールを適用すると次のような計算になります・

$$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ k+m & l+n \end{pmatrix}。$$

この計算を、ベクトルの和の計算の省略型だと考えてみましょう。ベクトルの空間を決めている単位ベクトルを$\boldsymbol{e_1}$、$\boldsymbol{e_2}$と表すとその空間上のベクトルは単位ベクトルのスカラー倍の和として表現できます。そのように考えて、ベクトルの形で書き直すと、以下の式になります

$$\begin{pmatrix} a\boldsymbol{e_1} & b\boldsymbol{e_2} \\ k\boldsymbol{e_1} & l\boldsymbol{e_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\boldsymbol{e_1} & d\boldsymbol{e_2} \\ m\boldsymbol{e_1} & n\boldsymbol{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+c)\boldsymbol{e_1} & (b+d)\boldsymbol{e_2} \\ (k+l)\boldsymbol{e_1} & (l+n)\boldsymbol{e_2} \end{pmatrix}$$

図 42 を見れば、一列目を、$(a\boldsymbol{e_1} \quad b\boldsymbol{e_2})$と$(c\boldsymbol{e_1} \quad d\boldsymbol{e_2})$の 2 つのベクトルの足し算だと考えたときに、この計算結果が正しいということがわかります。

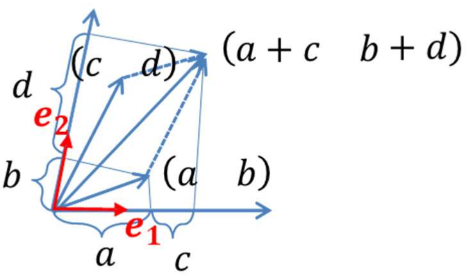

図 42.　ベクトルの和と行列の和

ここで用いているベクトルからベクトル空間上の座標への変換は次の通りです。

$$\boldsymbol{a} \leftrightarrow a\boldsymbol{e_1} \leftrightarrow (a \quad 0)$$

$$\boldsymbol{b} \leftrightarrow b\boldsymbol{e_2} \leftrightarrow (0 \quad b)$$

$$\boldsymbol{c} \leftrightarrow c\boldsymbol{e_1} \leftrightarrow (c \quad 0)$$

$$\boldsymbol{d} \leftrightarrow d\boldsymbol{e_2} \leftrightarrow (0 \quad d)$$

したがって次のように変形されるので

$$(a \quad b) \leftrightarrow a\boldsymbol{e_1} + b\boldsymbol{e_2}$$

$$(c \quad d) \leftrightarrow c\boldsymbol{e_1} + d\boldsymbol{e_2}$$

第一列に関して、次のように計算できます。

$$(a \quad b) + (c \quad d) = a\boldsymbol{e_1} + b\boldsymbol{e_2} + c\boldsymbol{e_1} + d\boldsymbol{e_2} = (a+c)\boldsymbol{e_1} + (b+d)\boldsymbol{e_2} = (a+c \quad b+d)$$

二行目についても同様です。

ベクトル空間が多次元になっても、ベクトルの数が増えても同じことが言えますから、以下の計算ルールが成立ちます。.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

2. スカラーと行列の積.

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{pmatrix}$$

α:スカラー

式 49

- 妥当性の確認

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & \cdots & 2a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_{n1} & 2a_{n2} & \cdots & 2a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & \cdots & 2a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_{n1} & 2a_{n2} & \cdots & 2a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & \cdots & 3a_{1n} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & \cdots & 3a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3a_{n1} & 3a_{n2} & \cdots & 3a_{nn} \end{pmatrix}$$

repeat

$$\alpha \boldsymbol{A} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{pmatrix}$$

3. 行列の積

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} & & a_{2l} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i1} & & & a_{ik} & & a_{il} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2j} & & b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & & & b_{kj} & \cdots & b_{km} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lj} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots a_{1k}b_{k1}\cdots +a_{1l}b_{l1} & \cdots & a_{11}b_{1m}+\cdots a_{1k}b_{km}\dots a_{1l}b_{lm} \\ \vdots & a_{i1}b_{1j}+\cdots a_{ik}b_{kj}\cdots +a_{il}b_{lj} & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+\cdots a_{nk}b_{k1}\cdots +a_{nl}b_{l1} & \cdots & a_{n1}b_{1m}+\cdots a_{nk}b_{km}\cdots +a_{nl}b_{lm} \end{pmatrix}$$

式 50

行列の掛け算$\boldsymbol{AB}$の手順は以下の通りです。

1) 行列$\boldsymbol{A}$のi 行のk 列目の因子と、行列$\boldsymbol{B}$のj 列のk 行目の因子を掛け合わせます。

2) それらの積の$k=1$ から $k=l$の和を求めます。

3) 2)で求めた総和を右辺の行列のi行j列の因子とします。

- 例

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} \end{pmatrix}$$

- 妥当性の確認

V-1-1 の行列の説明で、行列の機能を連立方程式の解法を例に挙げて説明しました。ここで、私たちは、中学校で習った連立方程式の解法と、行列を用いた解法を比較して、行列の機能を理解しました。その経験で、ある程度行列計算のルールの妥当性を感覚的にわかったと思いますが。もう少し、理論的その関係を考察してみます。ここでもベクトルを考えます。一つのベクトルは次のように、$1 \times l$ の行列として表せますし、単位ベクトルの一次結合（単位ベクトルのスカラー倍の和）としても表せます。

$$\boldsymbol{a}=(a_1 \quad \cdots \quad a_j \quad \cdots \quad a_l)=a_1\boldsymbol{e_1}+\cdots+a_j\boldsymbol{e_j}+\cdots+a_l\boldsymbol{e_l}$$

$$\boldsymbol{b}=(b_1 \quad \cdots \quad b_i \quad \cdots \quad b_l)=b_1\boldsymbol{e_1}+\cdots+b_i\boldsymbol{e_i}+\cdots+b_l\boldsymbol{e_l}$$

この二つのベクトルを掛け合わせます。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ab}&=a_1b_1\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_1}+\cdots+a_jb_1\boldsymbol{e_j}\boldsymbol{e_1}+\cdots+a_lb_1\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_l}\\&+a_1b_2\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}+\cdots+a_jb_2\boldsymbol{e_j}\boldsymbol{e_2}+\cdots+a_lb_2\boldsymbol{e_l}\boldsymbol{e_2}\\&\vdots\\&+a_1b_l\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_l}+\cdots+a_jb_l\boldsymbol{e_j}\boldsymbol{e_l}+\cdots+a_lb_l\boldsymbol{e_l}\boldsymbol{e_l}\end{aligned}$$

単位ベクトルがすべて直交しているとします。

$$\boldsymbol{e_i}\perp\boldsymbol{e_j} \qquad (i\neq j)$$

$$\perp: 直交$$

$\boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_j}$は内積ですから

$$\boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_j}=0$$

$$\boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_i}=1$$

$$\because \ \boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_j}=|\boldsymbol{e_i}||\boldsymbol{e_j}|\cos\theta_{i-j}$$

$$\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=0, \quad \cos 0=1$$

$$\boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_j}: 内積$$

$$\therefore\ \boldsymbol{ab} = a_1 b_1 \boldsymbol{e_1 e_1} + \cdots + a_i b_i \boldsymbol{e_i e_i} + \cdots + a_l b_l \boldsymbol{e_l e_l}$$
$$= a_1 b_1 + \cdots + a_i b_i + \cdots + a_l b_l$$

$$\boldsymbol{ab} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_i b_i + \cdots + a_l b_l$$

$\boldsymbol{ab}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$の内積になります。
次に行列$\boldsymbol{A}$をｎ個のベクトルを縦に並べたベクトルを $n \times 1$ の行列だと考えます。これは、$n \times l$の行列としても表せます。また行列$\boldsymbol{B}$ をｍ個のベクトルを横に並べた$1 \times m$の行列だと考えます。$\boldsymbol{A}$と同様に$\boldsymbol{B}$はl x mの行列として表せます。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nl} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{il} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{lj} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} & & a_{2l} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i1} & & & a_{ik} & & a_{il} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2j} & & b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & & & b_{kj} & \cdots & b_{km} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lj} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots a_{1k}b_{k1} \cdots + a_{1l}b_{l1} & \cdots & a_{11}b_{1m} + \cdots a_{1k}b_{km} \ldots a_{1l}b_{lm} \\ \vdots & a_{i1}b_{1j} + \cdots a_{ik}b_{kj} \cdots + a_{il}b_{lj} & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + \cdots a_{nk}b_{k1} \cdots + a_{nl}b_{l1} & \cdots & a_{n1}b_{1m} + \cdots a_{nk}b_{km} \cdots + a_{nl}b_{lm} \end{pmatrix}$$

単位ベクトルが相互に直交しているという前提で計算ルールの妥当性を説明することに疑問を持つ賢明な読者もいることだろうと想像できます。確かに、純粋に数学的な証明と考えれば、直交座標系を前提にすることに疑問を持つことは正しいでしょう。実際、直交系を前

提にしなければ、$\boldsymbol{e_i e_j} = 0$とは言えません。しかし、座標変換によって座標空間を直交系に変換することは可能だし、直交系を前提にして、計算ルールを作ることによって、因子が0になることに空間的な意味が生じて、ベクトル空間の解析が可能になるのです。

4. 計算の順序

行列の掛け算は、スカラーの掛け算のように互換的ではありません（計算式の並び方を入れ替えることはできない)。しかし、掛け算をどこからやっても結果は同じになります。

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$$

$$(\mathbf{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$

式 51

5. 行列の割り算

   行列の割り算は存在しません。割り算の相当するものは、逆行列を掛けることです。

6. 行・列の入れ替え

   行同士、列同士を入れ替わると正負の符号が変わります。

- 例

  もっとも単純な例

$$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} k & l \\ a & b \end{pmatrix}$$

この変化は一見何の変化も伴っていないように見えますが、行列式を計算してみると、

$$\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} = al - bk$$

$$\begin{vmatrix} k & l \\ a & b \end{vmatrix} = kb - al = -(\mathrm{al} - \mathrm{bk})$$

明らかに行列式の正負が変わっています。

$$\begin{vmatrix} k & l \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}$$

これはある意味で当然のことです。たとえば、次の連立方程式を考えると

$$ax + by = \alpha$$

$$kx + ly = \beta$$

上の式から下の式を引くことを考えると

$$(ax + by) - (kx + ly) = \alpha - \beta$$

となりますが、順番を入れ替えると以下のようになって

$$(kx + ly) - (ax + by) = \beta - \alpha$$

正負が変わります。

次の3×3の行列について考えます

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} s & t & u \\ a & b & c \\ k & l & m \end{pmatrix}$$

この入れ替えを、１ステップずつ考えると、２回の入れ替えが行われています。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b & c \\ s & t & u \\ k & l & m \end{pmatrix} = -(-\begin{pmatrix} s & t & u \\ a & b & c \\ k & l & m \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} s & t & u \\ a & b & c \\ k & l & m \end{pmatrix}$$

列同士の入れ替えについても、同様のことが言えます。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c & b \\ s & m & l \\ k & u & t \end{pmatrix} = -(-\begin{pmatrix} c & a & b \\ m & k & l \\ u & s & t \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} c & a & b \\ m & k & l \\ u & s & t \end{pmatrix}$$

- 行あるいは列のスカラー倍の足し算引き算は、正負を変化させません。

例

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} + \alpha a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} + \alpha a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} + a\alpha_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + \beta a_{11} & \cdots & a_{ij} + \beta a_{1j} & \cdots & a_{in} + \beta a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} - a_{ij}\frac{a_{1j}}{a_{11}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} - a_{nj}\frac{a_{1j}}{a_{11}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \frac{a_{i1}}{a_{11}} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} - a_{ij}\frac{a_{i1}}{a_{11}} & \cdots & a_{in} - a_{in}\frac{a_{i1}}{a_{11}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$