V-1-3. 逆行列と単位行列.

二元の連立方程式を行列で表現すると次のようになります。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

個の両辺に $\frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}$をかけます。

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

左辺は

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}}(al - bk)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{(al - bk)}{(al - bk)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\because \begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} al - bk & bl - bl \\ -ak + ak & -bk + al \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} al - bk & 0 \\ 0 & al - bk \end{pmatrix}$$

$$= (al - bk)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

右辺は

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} l\alpha - b\beta \\ -k\alpha + a\beta \end{pmatrix}$$

となって、左辺＝右辺なので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} l\alpha - b\beta \\ -k\alpha + a\beta \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{l\alpha - b\beta}{al - bk}$$

$$y = \frac{-(k\alpha - a\beta)}{al - bk}$$

となって、連立方程式の解が得られます。

このことから、私たちは $\frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}$が$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}$の逆行列だとわかります。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}$$

また、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が単位行列だということも、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$をかけても変化がないからです。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

これを確認するために、もう一度、一ステップずつ計算してみます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

今までの例で、行列計算とその機能について理解できただろうと思いますが、まだはっきりしないところがあるかもしれません。そこで、３元の連立方程式でもう一度、同じことをしてみます。

$$ax + by + cz = \alpha \qquad \text{i}$$

$$kx + ly + mz = \beta \qquad \text{ii}$$

$$sx + ty + uz = \gamma \qquad \text{iii}$$

i ÷ a $\qquad x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}z = \frac{\alpha}{a} \qquad$ i’

ii ÷ k $\qquad x + \frac{l}{k}y + \frac{m}{k}z = \frac{\beta}{k} \qquad$ ii’

iii ÷ s $\qquad x + \frac{t}{s}y + \frac{u}{s}z = \frac{\gamma}{s} \qquad$ iii’

i′－ii′ $\qquad \left(\frac{b}{a} - \frac{l}{k}\right)y + \left(\frac{c}{a} - \frac{m}{k}\right)z = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{k} \qquad$ iv

′ －③′ $\qquad \left(\frac{b}{a} - \frac{t}{s}\right)y + \left(\frac{c}{a} - \frac{u}{s}\right)z = \frac{\alpha}{a} - \frac{\gamma}{s} \qquad$ v

$$\left(\frac{bk-a}{ak}\right)y + \left(\frac{ck-am}{ak}\right)z = \frac{k\alpha-}{ak} \qquad \text{iv’}$$

$$\left(\frac{bs-a}{as}\right)y + \left(\frac{cs-a}{as}\right)z = \frac{s\alpha-a}{as} \qquad \text{v’}$$

$$y + \left(\frac{ck-a}{bk-al}\right)z = \frac{k\alpha}{bk-a} \qquad \text{iv”}$$

$$y + \left(\frac{cs-a}{bs-a}\right)z = \frac{s\alpha-}{bs-at} \qquad \text{v”}$$

$$\mathrm{iv}'' - \mathrm{v}'' \qquad \left(\frac{ck-am}{bk-al} - \frac{cs-au}{bs-at}\right)z = \frac{k\alpha-a\beta}{bk-al} - \frac{s\alpha-a\gamma}{bs-at} \qquad \mathrm{vi}$$

$$\{(ck-am)(bs-at)-(cs-au)(bk-al)\}z = (k\alpha-a\beta)(bs-at)-(s\alpha-a\gamma)(bk-al) \quad \mathrm{vi'}$$

$$(\cancel{bcks} - abms - ackt + a^2mt - \cancel{bcks} + abku + acls - a^2ul)z$$
$$= \cancel{bks\alpha} - abs\beta - akt\alpha + a^2t\beta - \cancel{bks\alpha} + abk\gamma + als\alpha - a^2l\gamma$$

$$a(-alu-bms-ckt+amt+bku+cls)z = a\{-(kt-ls)\alpha+(at-bs)\beta-(al-bk)\gamma\}$$
$$-a(alu+bms+ckt-amt-bku-cls)z = -a\{(kt-ls)\alpha-(at-bs)\beta+(al-bk)\gamma\}$$
$$(alu+bms+ckt-amt-bku-cls)z = (kt-ls)\alpha-(at-bs)\beta+(al-bk)\gamma$$
$$z = \frac{(kt-ls)\alpha-(at-bs)\beta+(al-bk)\gamma}{alu+bms+ckt-amt-bku-cls}$$

$$y = \frac{k\alpha-a\beta}{bk-al} - \left(\frac{ck-am}{bk-al}\right)z \qquad \mathrm{iv'''}$$

$$y = \frac{1}{bk-al}\{(\mathrm{k}\alpha-\mathrm{a}\beta)-(ck-am)z\}$$

$$= \frac{1}{bk-al}\left\{\frac{(\mathrm{k}\alpha-\mathrm{a}\beta)(alu+bms+ckt-amt-bku-cls)-(ck-am)((kt-ls)\alpha-(at-bs)\beta+(al-bk)\gamma)}{alu+bms+ckt-amt-bku-cls}\right\}$$

分子について

$$aklu\alpha + bkms\alpha + \cancel{ck^2t\alpha} - \cancel{akmt\alpha} - bk^2u\alpha - \cancel{ckls\alpha} - a^2lu\beta - \cancel{abms\beta} - \cancel{ackt\beta} + \cancel{a^2mt\beta}$$
$$+ abku\beta + acls\beta - \cancel{ck^2t\alpha} + \cancel{akmt\alpha} + \cancel{ckls\alpha} - alms\alpha + \cancel{ackt\beta} - \cancel{a^2mt\beta}$$
$$- bcks\beta + \cancel{abms\beta} - (ck-am)(al-bk)\gamma$$
$$= al(ku-ms)\alpha - bk(ku-ms)\alpha - al(au-cs)\beta + bk(au-cs)\beta + (al-bk)(am-ck)\gamma$$
$$= (\mathrm{al}-\mathrm{bk})(ku-ms)\alpha - (al-bk)(au-cs)\beta + (al-bk)(am-ck)\gamma$$
$$(\mathrm{al}-\mathrm{bk})\{(\mathrm{ku}-\mathrm{ms})\alpha-(\mathrm{au}-\mathrm{cs})\beta+(\mathrm{am}-\mathrm{ck})\gamma\}$$

Conclusion for numerator

$$y = \frac{-(\mathrm{ku}-\mathrm{ms})\alpha+(\mathrm{au}-\mathrm{cs})\beta-(\mathrm{am}-\mathrm{ck})\gamma}{alu+bms+ckt-amt-bku-cls}$$

$$x = \frac{\alpha}{a} - \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z \qquad \mathrm{i''}$$

$$x = \frac{\alpha(alu+bms+ckt-amt-bku-cls)-b(-(\mathrm{ku}-\mathrm{ms})\alpha+(\mathrm{au}-\mathrm{cs})\beta-(\mathrm{am}-\mathrm{ck})\gamma)-c((kt-ls)\alpha-(at-bs)\beta+(al-bk)\gamma)}{a(alu+bms+ckt-amt-bku-cl\ )}$$

分子について

$$\alpha(alu+\cancel{bms}+\cancel{ckt}-amt-\cancel{bku}-\cancel{cls}+\cancel{bku}-\cancel{bms}-\cancel{ckt}+\cancel{cls})+(-abu+\cancel{bcs}+act-\cancel{bcs})\beta+(abm-\cancel{bck}-acl+\cancel{bck})\gamma$$
$$= \{(lu-mt)\alpha-(bu-ct)\beta+(bm-cl)\gamma\}$$

$$x=\frac{(lu-mt)\alpha-(bu-ct)\beta+(bm-cl)\gamma}{alu+bms+ckt-amt-bku-cls}$$

結果の要約

$$x=\frac{(lu-mt)\alpha-(bu-ct)\beta+(bm-cl)\gamma}{alu+bms+ckt-amt-bku-cls}=\frac{\alpha lu+bm\gamma+c\beta t-cl\gamma-b\beta u-\alpha mt}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt}$$

$$y=\frac{-(\mathrm{ku}-\mathrm{ms})\mathrm{\alpha}+(\mathrm{au}-\mathrm{cs})\mathrm{\beta}-(\mathrm{am}-\mathrm{ck})\mathrm{\gamma}}{alu+bms+ckt-amt-bku-cls}=\frac{a\beta u+\alpha ms+kc\gamma-c\beta s-\alpha ku-am\gamma}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt}$$

$$\mathrm{z}=\frac{(kt-ls)\alpha-(at-bs)\beta+(al-bk)\gamma}{alu+bms+ckt-amt-bku-cls}=\frac{al\gamma+b\beta s+\alpha kt-\alpha ls-bk\gamma-a\beta t}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt}$$

この結果から、以下のことがわかります。

分子は与えられた連立方程式の係数で作った3×3の行列の行列式です。分子のα, β, γの係数は、2×2の行列の行列式です。つまりつぎのようになっています。

$$x=\frac{\begin{vmatrix}l & m\\ t & u\end{vmatrix}\alpha-\begin{vmatrix}b & c\\ t & u\end{vmatrix}\beta+\begin{vmatrix}b & c\\ l & m\end{vmatrix}\gamma}{\begin{vmatrix}a & b & c\\ k & l & m\\ s & t & u\end{vmatrix}}$$

$$y=\frac{-\begin{vmatrix}k & m\\ s & u\end{vmatrix}\mathrm{\alpha}+\begin{vmatrix}a & c\\ s & u\end{vmatrix}\mathrm{\beta}-\begin{vmatrix}a & c\\ k & m\end{vmatrix}\mathrm{\gamma}}{\begin{vmatrix}a & b & c\\ k & l & m\\ s & t & u\end{vmatrix}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}k & l\\ s & t\end{vmatrix}\alpha-\begin{vmatrix}a & b\\ s & t\end{vmatrix}\beta+\begin{vmatrix}a & b\\ k & l\end{vmatrix}\gamma}{\begin{vmatrix}a & b & c\\ k & l & m\\ s & t & u\end{vmatrix}}$$

私たちが、２元の連立方程式の時に、行列式を作ったやり方を思い出してみます。以下のように逆行列についてまず考えました

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

同様に

$$\mathbf{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

この連想から、多分逆行列は次のようになっているのだろうと想像できます。

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

この予想が正しいことを確かめましょう。

次の計算をしてみます。

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \frac{\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}$$

分子について

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(lu - mt) - k(bu - ct) + s(bm - cl) & -b(lu - mt) + l(bu - ct) - t(bm - cl) & c(lu - mt) - m(bu - ct) + u(bm - cl) \\ -a(ku - ms) + k(au - cs) - s(am - ck) & -b(ku - ms) + l(au - cs) - t((am - ck) & -c(ku - ms) + m(au - cs) - u(am - ck \\ a(kt - ls) - k(at - bs) + s(al - bk) & b(kt - ls) - l(at - bs) + t(al - bk) & c(kt - ls) - m(at - bs) + u(al - bk) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} alu + bms + ckt - amt - bku - cls & 0 & 0 \\ 0 & alu + bms + ckt - amt - bku - cls & 0 \\ 0 & 0 & alu + bms + ckt - amt - bku - cls \end{pmatrix}$$

$$= (alu + bms + ckt - amt - bku - cls) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以上で、

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が確認できます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

確かに $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ をかけても何の変化も起こりません。$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は単位行列だとわかります。単位行列は、以下の行列のように正方行列の対角因子がすべて１でその他の因子が０の行列です。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$の逆行列は

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

です。

これらの説明で、行列式、逆行列、単位行列の作り方が感覚的にわかってきました。もう少し数学的に正確な理解のために、ベクトル空間上で行列がどんな機能を持っているのかを考えます。

ベクトルとは方向もった量だと思ってください。方向を持たない量をスカラーと言います。時速１ｋｍの１はスカラーですが、時速１ｋｍで南に行くは、方向を持っているから↓へ 1km/hr というベクトルです。つまり、ベクトルは量と方向を持っているのです。一般の生活でも、「そこの道をまっすぐ 100m いって、左に曲がって 200m行く。」というようなベクトル的表現をしばしば使っています。その感じです。ベクトル的表現を使わないで道案内をするのは難しいでしょう。この例で分かるように、しばしばベクトルの足し算が行われます。この道をまっすぐ 100m というベクトルに、左に曲がって 200m というベクトルが足されました。図にすると次のような感じです。

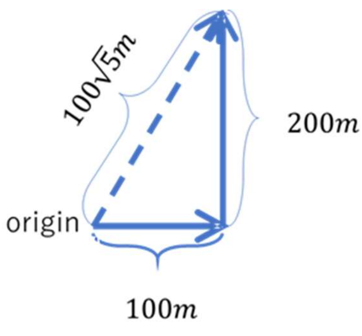

図 43.地図上のベクトル表現

これは確かにベクトルの足し算です。「まっすぐ 100m いく」というベクトルに、「左に曲がって 200m行く」というベクトルをたしたら、目的地は原点から見て「前方斜め左に $100\sqrt{5}$m 行ったところ」という新しいベクトルができました。

この例では、はじめに「まっすぐ」という言い方で、最初の方向を決めました。しかし、「まっすぐ」が東西南北どの方向を向いているのかはわかりません。そこで、この方向を基準に

することに決めてその方向での長さの単位を$\overrightarrow{e_1}$とします。この場合はまっすぐの方向に 1m を$\overrightarrow{e_1}$とそればよいでしょう。すると「まっすぐに 100m」というベクトルを$\vec{a}$とすると、

$$\vec{a} = 100\overrightarrow{e_1}$$

とベクトルを方向を示し単位ベクトルとスカラーの積で表すことができます。「左に曲がって 200m」ですが、本当に正確に直角に左に曲がることになるのかどうかはわかりませんが、とりあえず、その方向を$\overrightarrow{e_2}$とすると、

$$\vec{b} = 200\overrightarrow{e_2}$$

と表すことができて、さらに、新しくできた破線で示されたベクトルは

$$\vec{a} + \vec{b} = 100\overrightarrow{e_1} + 200\overrightarrow{e_2}$$

となります。

$$\vec{a} = 100\overrightarrow{e_1}$$

$$\vec{b} = 200\overrightarrow{e_2}$$

実際に直角になっているかどうかは、とりあえず問わないことにすると

$\vec{a}$は$\overrightarrow{e_2}$の方向の要素を持たないし、$\vec{b}$は$\overrightarrow{e_1}$の方向の要素を持たないことになります。それぞれの方向要素のスカラーを成分として、それぞれのベクトルを、($\overrightarrow{e_1}$の成分, $\overrightarrow{e_2}$の成分)のように表すことにすると

$$\vec{a} = (100, 0)$$

$$\vec{b} = (0, 200)$$

と表せます。だいぶ行列の表現に近くなってきました。ためにしに行列の足し算の約束にしたがって、$\vec{a} + \vec{b}$を計算します。

$$\vec{a} + \vec{b} = (100, 0) + (0, 200) = (100, 200)$$

仮に、右に曲がるときに正確に直角に曲がったとすれば

となるので、実感として納得できます。

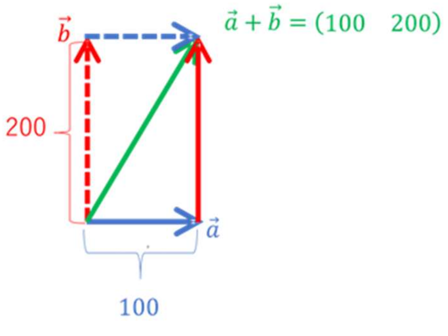

図 44. ベクトルの和

ここで、$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$のように、ベクトルを、立てに一列に並べることを考えます。 1 行が一つのベクトルを表すということです。

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\overrightarrow{e_1} & 0\overrightarrow{e_2} \\ 0\overrightarrow{e_1} & 200\overrightarrow{e_2} \end{pmatrix}$$

これを行列の掛け算の結果だと考えると

$$\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}100 & 0\\ 0 & 200\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}100\overrightarrow{e_1}\\ 200\overrightarrow{e_2}\end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = 100\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$$

$$\vec{b} = 200\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$$

となってちゃんと元に戻ります。

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = (100 \quad 200)\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\end{pmatrix} = (100\overrightarrow{e_1} + 200\overrightarrow{e_2})$$

$$\vec{a}+\vec{b} = 100\overrightarrow{e_1} + 200\overrightarrow{e_2}$$

こちらも、問題ありません。

ベクトルを示す矢印が煩わしいので、少し記法を変えます。スカラー量に対してベクトル量を区別して表すときにはゴシック（太字を使います）

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = 100\boldsymbol{e_1} + 200\boldsymbol{e_2}$$

実際に町の中で正確に道が直行しているということは少ないでしょう。田舎の道ならなおさらです。つまり、上で示した式は、話した人、言われた人の頭の中の地図でそうなっているということです。頭の中の地図は実際の地図に比べると歪んでいるのです。ゆがみを直したらどうなるのかを知りたくなります。

たとえば、道は直行していてなくて、実際には 30°だけ傾いていたとします。

これを正しく直行している地図上の点として書きなおすことにします。人間が物事の関係を独立した（直行した）関係でとらえようとするという作業 A を「事実」に加えた結果、直行的な表現（$\boldsymbol{e_1}$と$\boldsymbol{e_2}$を単位行列とする世界）になったと考えるのです。この作業 A を行列で表すことを考えます。

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon_1}\\ \boldsymbol{\varepsilon_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}\\ \boldsymbol{e_2}\end{pmatrix}$$

それぞれの単位行列の関係を図示すと次のようになります

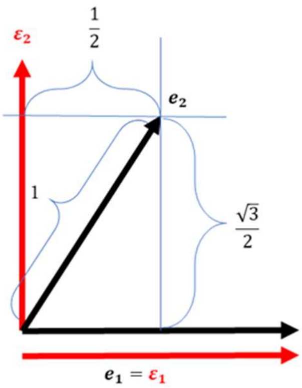

図 45. 単位行列の関係

$$\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{\varepsilon_1}$$

$$\boldsymbol{e_2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\varepsilon_1} + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\varepsilon_2}$$

という関係にあります。

これを、それぞれの単位ベクトルを立てに並べたたて行列にして、行列計算で表すと、次のようになります。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_1} \\ \boldsymbol{\varepsilon_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix}$$

試してみましょう

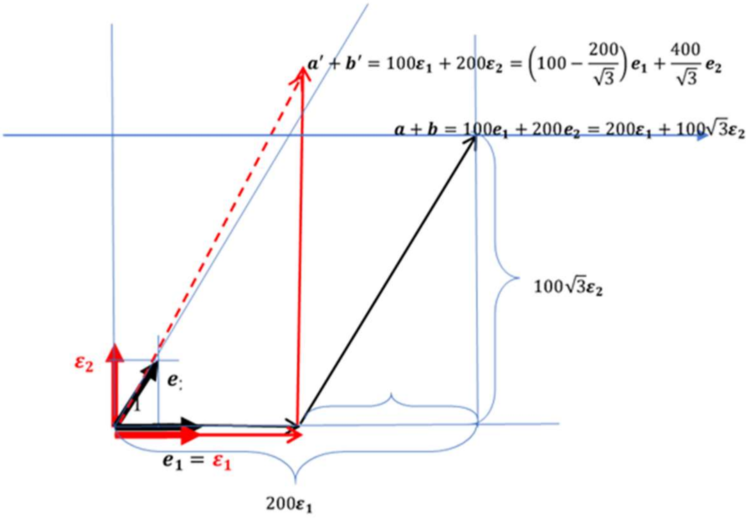

図 46.実際の地図から思考上の地図に変形

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a'}\boldsymbol{b'}$ともに、２つの単位ベクトルのセットであらわせますから、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{a'} + \boldsymbol{b'}$の変換をそれぞれのベクトルで表してみます。

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{a'} + \boldsymbol{b'}$$

$$100\boldsymbol{e_1} + 200\boldsymbol{e_2} \rightarrow \left(100 - \frac{200}{\sqrt{3}}\right)\boldsymbol{e_1} + \frac{400}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e_2}$$

$$200\boldsymbol{\varepsilon_1} + 100\sqrt{3}\boldsymbol{\varepsilon_2} \rightarrow 100\boldsymbol{\varepsilon_1} + 200\boldsymbol{\varepsilon_2}$$

その反対方向の変換は

$$\boldsymbol{a'} + \boldsymbol{b'} \rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

$$\left(100 - \frac{200}{\sqrt{3}}\right)\boldsymbol{e_1} + \frac{400}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e_2} \rightarrow 100\boldsymbol{e_1} + 200\boldsymbol{e_2}$$

$$100\boldsymbol{\varepsilon_1}+200\boldsymbol{\varepsilon_2}\rightarrow 200\boldsymbol{\varepsilon_1}+100\sqrt{3}\boldsymbol{\varepsilon_2}$$

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rightarrow\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$ の変換を行列$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'\rightarrow\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ の変換を行列$\boldsymbol{B}$で表します。

$$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}')$$

ここで、これらのベクトルを、ベクトルを縦に並べた行列で表すと、

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}100\boldsymbol{e_1}\\200\boldsymbol{e_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\boldsymbol{\varepsilon_1}\\100\sqrt{3}\boldsymbol{\varepsilon_2}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'=\begin{pmatrix}\left(100-\frac{200}{\sqrt{3}}\right)\boldsymbol{e_1}\\\frac{400}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\boldsymbol{\varepsilon_1}\\200\boldsymbol{\varepsilon_2}\end{pmatrix}$$

ここで、単位ベクトルを外して表現しますが、この議論では、もともとどんなベクトル空間で表現しているのかがわかるように、印をつけておきます。

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}100_{(e_1)}\\200_{(e_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200_{(\epsilon_1+\varepsilon_2)}\\100\sqrt{3}_{(\epsilon_1+\varepsilon_2)}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'=\begin{pmatrix}\left(100-\frac{200}{\sqrt{3}}\right)_{(e_1+e_2)}\\\frac{400}{\sqrt{3}}_{(e_1+e_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100_{(\epsilon_1)}\\200_{(\varepsilon_2)}\end{pmatrix}$$

変換を行列計算で表すと

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}100_{(e_1)}\\200_{(e_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(100-\frac{200}{\sqrt{3}}\right)_{(e_1+e_2)}\\\frac{400}{\sqrt{3}}_{(e_1+e_2)}\end{pmatrix}\qquad\text{i}$$

または

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}200_{(\epsilon_1+\varepsilon_2)}\\100\sqrt{3}_{(\epsilon_1+\varepsilon_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100_{(\epsilon_1)}\\200_{(\varepsilon_2)}\end{pmatrix}\qquad\text{ii}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}')=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}\left(100-\frac{200}{\sqrt{3}}\right)_{(e_1+e_2)}\\\frac{400}{\sqrt{3}}_{(e_1+e_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100_{(e_1)}\\200_{(e_2)}\end{pmatrix}\qquad\text{iii}$$

または

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}100_{(\epsilon_1)}\\200_{(\varepsilon_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200_{(\epsilon_1+\varepsilon_2)}\\100\sqrt{3}_{(\epsilon_1+\varepsilon_2)}\end{pmatrix}\qquad\text{iv}$$

この計算を図 46 にしたがって、その由来別に分解すると

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}100_{(\epsilon_1)}\\200_{(\varepsilon_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100_{(\epsilon_1)}+100_{(\varepsilon_2)}\\0_{(\epsilon_1)}+100\sqrt{3}_{(\varepsilon_2)}\end{pmatrix}$$

これから、この計算のプロセスを次のように推測することが出来ます。

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100_{(\epsilon_1)}\\200_{(\varepsilon_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100_{(\epsilon_1)}+100_{(\varepsilon_2)}\\0_{(\epsilon_1)}+100\sqrt{3}_{(\varepsilon_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\\100\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

この推定の妥当性は、次の計算によって確認できます。

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(100-\frac{200}{\sqrt{3}}\right)_{(e_1+e_2)}\\\frac{400}{\sqrt{3}}_{(e_1+e_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100_{(e_1)}-\frac{200}{\sqrt{3}}_{(e_1+e_2)}+\frac{200}{\sqrt{3}}_{(e_1+e_2)}\\0_{(e_1+e_2)}+200_{(e_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix}$$

以上により

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

同様に、$\boldsymbol{A}$について

$$\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200_{(\epsilon_1+\varepsilon_2)}\\100\sqrt{3}_{(\epsilon_1+\varepsilon_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200_{(\epsilon_1)}-100_{(\epsilon_1+\varepsilon_2)}\\0_{(\epsilon_1+\varepsilon_2)}+200_{(\epsilon_1+\varepsilon_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100_{(e_1)}\\200_{(e_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100_{(e_1)}-\frac{200}{\sqrt{3}}_{(e_2)}\\\frac{400}{\sqrt{3}}_{(e_2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100-\frac{200}{\sqrt{3}}\\\frac{400}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$は逆方向の変換ですから、互いに逆行列になっているはずです。これを確かめます。

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times 1 & 1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\times 1+\frac{2}{\sqrt{3}}\times 0 & 0\times\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}$$

確かに$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$は互いに逆行列です。私たちは、$\boldsymbol{A}$によって実際の世界を頭の中の世界に投影しています。最近のテクノロジーを使うと、曲面上に平面的に見える絵を投影したり、その反対のこともできます。こうした機能を私たちの頭脳は持っているということです。また、ある人は$\boldsymbol{A}^{-1}$の機能をつかって、頭の中に与えられた情報から、現実の世界を描こうとするでしょう。しかし、これが可能で正しいことかどうかは疑問があります。頭の中の世界は人によって様々ですから、もともとの情報に違いがあり、正しい現実世界の存在も疑わしいからです。ここで言えることは、こういう方法である座標系に描かれた像を別の座標系に投影して表現することが出来るということです。

上記の試行から得られた重要な情報は、ベクトルのセットとして、行列を捉えることが出来るということです。ただ、上記の説明では、著者は何の前提も情報もなく勝手にベクトルのセットから行列を作りました。その目的は、読者に行列を使った計算技術をごく自然なものとして受け取ってもらいたかったからです。もう少し抽象的に言えば、我々がベクトルの矢印を描いたとき、ベクトルの長さと方向を、行列を掛けることによって変形できる。つまり、行列も大きさと方向性を持っているということを実感してもらいたかったのです。