V-1-4.　行列式

私たちは、すでに行列式を使った計算を以前の説明ですでにしています。そこでは、行列式が何か説明もなしに、行列式はスカラーで大きさのようなものだと言って、無理やりその計算を押し付けました。すでに私たちは逆行列と単位行列が何かは理解しています。そして、逆行列が最終的に行列式による割り算によって得られることも知っています。また、単位行列の計算にも行列式による割り算が出てきます。つまり、読者はすでに、行列式が何かの割合のようなものだということに気付いているでしょう。これは単なる推測ですが、この推測の妥当性を理論的に検証します。

まず、２次元平面上で面積と形がわかっている図形が、行列による変換でどのように変形するかを考えます。例として挙げるのは図 47 の実線で示した３つの三角形です。

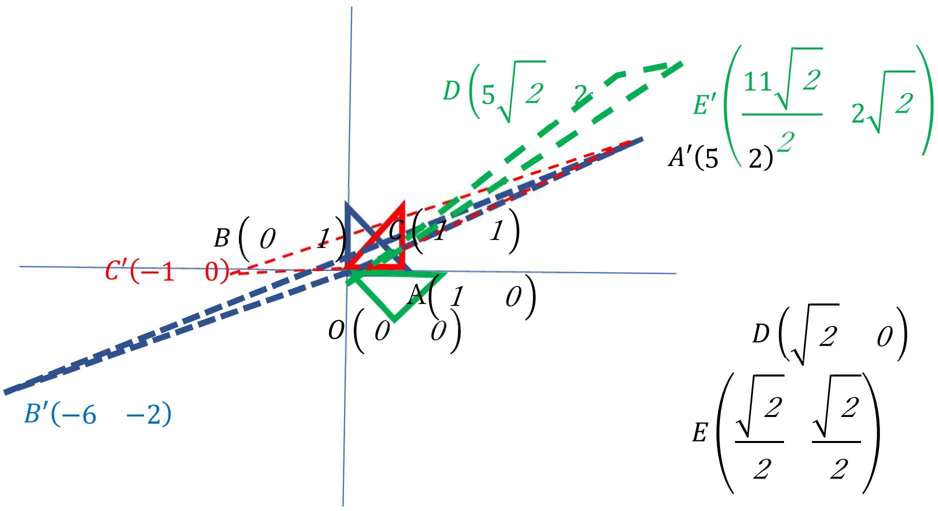


図 47 行列による三角形の変形

変形に使う行列は以下の行列です。

$$\begin{pmatrix}5 & -6\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

青、赤、緑の実線の三角形を変形して破線の三角形になります。青の実線の三角形は⊿BOA、赤の実線の三角形は⊿OAC、緑の実線の三角形は⊿OED です。それぞれの頂点の座標は次の通りです。

$$\mathrm{O}: (0 \quad 0)$$

$$\mathrm{A}: (1 \quad 0)$$

$$\mathrm{B}: (0 \quad 1)$$

$$\mathrm{C}: (1 \quad 1)$$

$$\mathrm{D}: (\sqrt{2} \quad 0)$$

$$\mathrm{E}:\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

各頂点の座標は行列による変換で次のように移動します。

$$\mathrm{A}':\begin{pmatrix}5 & -6\\2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}':\begin{pmatrix}5 & -6\\2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C}':\begin{pmatrix}5 & -6\\2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{D}':\begin{pmatrix}5 & -6\\2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{E}':\begin{pmatrix}5 & -6\\2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

それぞれの三角形の面積は次の通りです。

$$⊿\mathrm{BOA}=⊿\mathrm{OAC}=⊿\,0\mathrm{ED}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$$

$$\Delta\mathrm{B}'\mathrm{OA}'=\frac{1}{2}\times\mathrm{OH}\times 2+\frac{1}{2}\times\mathrm{OH}\times 2=2\times\frac{1}{2}=1$$

$$\Delta\mathrm{OA}'\mathrm{C}'=\frac{1}{2}\times\mathrm{OC}'\times 2=1$$

$$\Delta 0\mathrm{E}'\mathrm{D}'=\frac{1}{2}\times\mathrm{E}'\mathrm{D}'\times 2\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2\sqrt{2}=1$$

$$\frac{\Delta\mathrm{B}'\mathrm{OA}'}{⊿\mathrm{BOA}}=\frac{\Delta\mathrm{OA}'\mathrm{C}'}{⊿\mathrm{OAC}}=\frac{\Delta 0\mathrm{E}'\mathrm{D}'}{⊿\,0\mathrm{ED}}=2$$

ところで、この変換の行列式の値は次の通りです。

$$\begin{vmatrix}5 & -6\\2 & -2\end{vmatrix}=2$$

つまり、三角形の面積の拡大率が行列式になっています。これは３次元の図形でも同じです。次の行列による変換を考えます。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -5 & -4\\2 & 4 & 3\\2 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & -5 & -4\\2 & 4 & 3\\2 & -1 & -1\end{vmatrix}=-4-30+8+32-10+3=-1$$

次の単位三角錐を変形します。

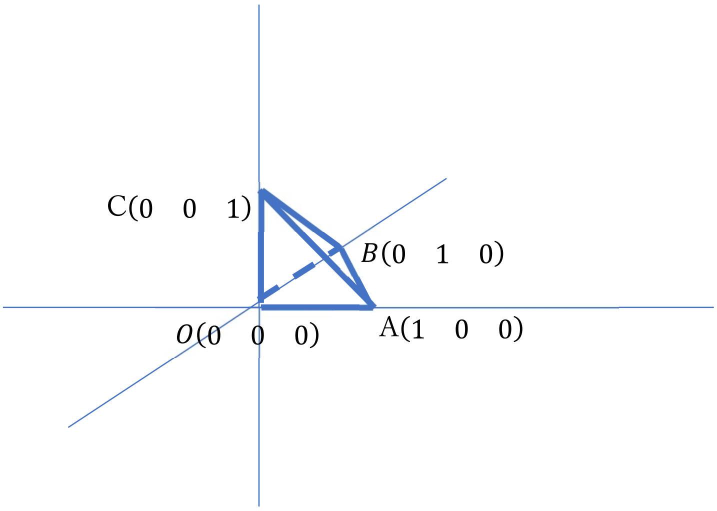


図 48. 変形する単位三角錐

この三角錐の体積は

$$V_o: 三角錐\ \mathrm{OABC}\ の体積$$

$$V_o = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$$

変換後の座標は

$$O\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}'\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}'\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C}'\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

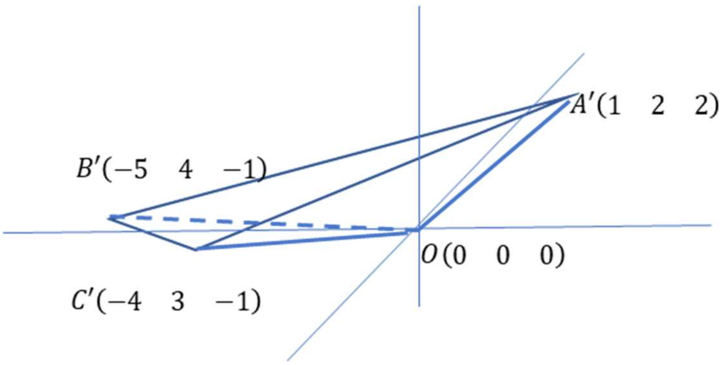


図 49. 変形後の三角錐

返還後の三角錐の体積の計算

底辺の三角形 $\Delta A'B'C'$の面積について

三角形$\Delta A'B'C'$を含む平面

$$\overleftarrow{B'A'} = (-5 \quad 4 \quad -1) - (1 \quad 2 \quad 2) = (-6 \quad 2 \quad -3)$$

$$\overleftarrow{C'A'} = (-4 \quad 3 \quad -1) - (1 \quad 2 \quad 2) = (-5 \quad 1 \quad -3)$$

平面はベクトル$\overleftarrow{A'O}$の先端から $\overleftarrow{B'A'}$ と $\overleftarrow{C'A'}$を延長した点の集合

$$u\overleftarrow{B'A'} + v\overleftarrow{C'A'} + \overleftarrow{A'O} = u(-6 \quad 2 \quad -3) + v(-5 \quad 1 \quad -3) + (1 \quad 2 \quad 2)$$

$$= (-6u - 5v + 1 \quad 2u + v + 2 \quad -3u - 3v + 2)$$

$$-6u - 5v + 1 = x \qquad \text{i}$$

$$2u + v + 2 = y \qquad \text{ii}$$

$$-3u - 3v + 2 = z \qquad \text{iii}$$

$\frac{1}{3}$iii

$$-u - v + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}z \qquad \text{iii'}$$

ii + iii′

$$u + 2 + \frac{2}{3} = y + \frac{1}{3}z$$

$$u = y + \frac{1}{3}z - \frac{8}{3} \qquad \text{iv}$$

i − 5 × iii′

$$-u + 1 - \frac{10}{3} = x - \frac{5}{3}z$$

$$u = -x + \frac{5}{3}z - \frac{7}{3} \qquad \text{v}$$

iv = v

$$y + \frac{1}{3}z - \frac{8}{3} = -x + \frac{5}{3}z - \frac{7}{3}$$

$$x + y - \frac{4}{3}z - \frac{1}{3} = 0$$

$$3x + 3y - 4z - 1 = 0$$

この平面から原点への距離 O への距離（平面と点の距離の公式*より）

$$\left|\overleftarrow{OH}\right| = \frac{3 \times 0 + 3 \times 0 - 4 \times 0 - 1}{\sqrt{3^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{34}}$$

- * 点と平面の距離の公式

  平面

  $$ax + by + cz + d = 0$$

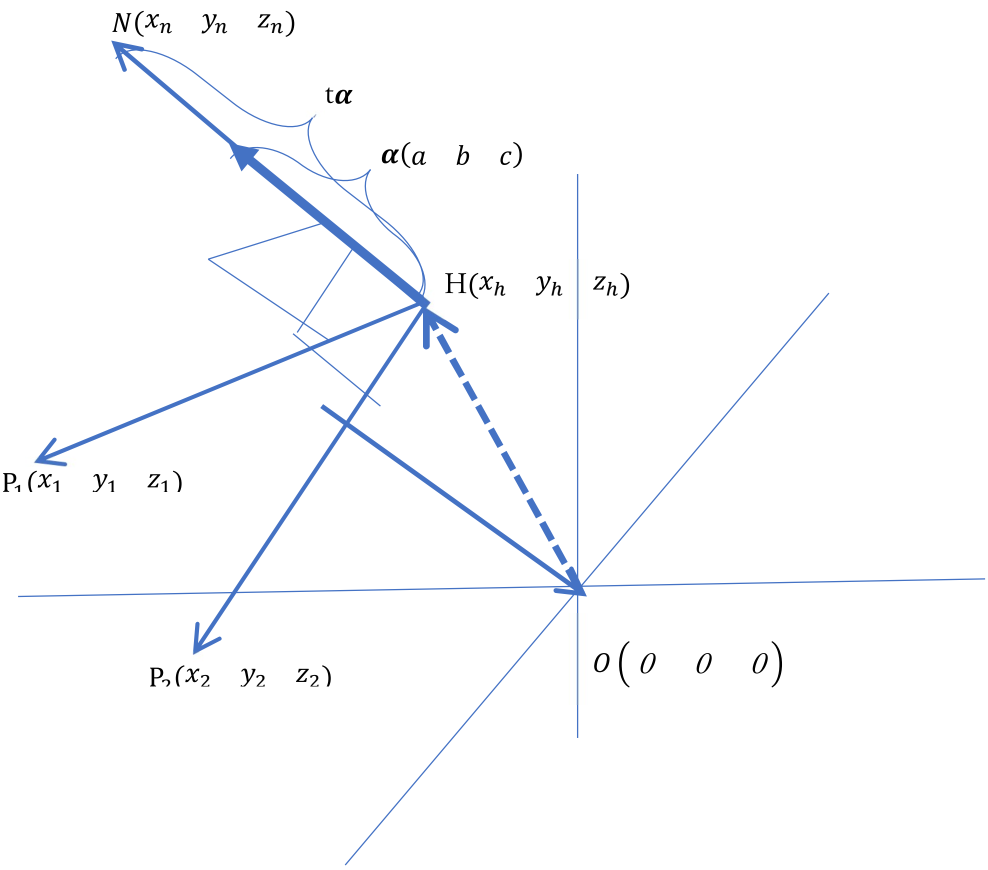
  点

  $$(x_n \quad y_n \quad z_n)$$

  距離

$$|\overleftarrow{\mathrm{NH}}| = \frac{|ax_n + by_n + cz_n + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

証明



N平面の法線上の点とし、平面上の点を$(x \quad y \quad z)$とします。平面上の法線の脚を H $(x_h \quad y_h \quad z_h)$ から引いた法線上のベクトルを$\overleftarrow{\mathrm{NH}}$ とし、ベクトルの先端の座標を $(x_n \quad y_n \quad z_n)$ とします。

ベクトルNH 上の単位ベクトルを$\boldsymbol{e} = (a \quad b \quad c)$とすると

$$\overleftarrow{\mathrm{NH}} = t\boldsymbol{e}$$

$$\overleftarrow{\mathrm{NH}} = (x_n - x_h \quad y_n - y_h \quad z_n - z_h) = t(a \quad b \quad c) \qquad \text{i} \qquad \qquad \text{i}$$

平面上の点 $\boldsymbol{p}$は

$$\boldsymbol{p} = (x - x_h \quad y - y_h \quad z - z_h)$$

ベクトル $\overleftarrow{\mathrm{NH}}$ と $\boldsymbol{p}$ は直交しているのでその内積は 0 です。

$$\overleftarrow{\mathrm{NH}} \cdot \boldsymbol{p} = 0$$

$$(x_n - x_h \quad y_n - y_h \quad z_n - z_h)\begin{pmatrix} x - x_h \\ y - y_h \\ z - z_h \end{pmatrix}$$

$$= t(a \quad b \quad c)\begin{pmatrix} x - x_h \\ y - y_h \\ z - z_h \end{pmatrix}$$

$$= t\big(a(x - x_h) + b(y - y_h) + c(z - z_h)\big) = 0$$

$$t \neq 0$$

$$ax + by + cz - (ax_h + by_h + cz_h) = 0$$

ここで

$$ax_h + by_h + cz_h + d = 0$$

なので

$$ax + by + cz + d = 0$$

ここで転置行列 $(a \quad b \quad c)^T$ 両辺にかけて

$$(x_n - x_h \quad y_n - y_h \quad z_n - z_h)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t(a \quad b \quad c)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$ax_n - ax_h + by_n - by_h + cz_n - cz_h = t(a^2 + b^c + c^2)$$

$$ax_n + by_n + cz_n - (ax_h + by_h + cz_h) = t(a^2 + b^c + c^2)$$

$$ax_h + by_h + cz_h = -d$$

$$a^2 + b^c + c^2 \neq 0$$

$$t = \frac{ax_n + by_n + cz_n + d}{a^2 + b^c + c^2}$$

$$\left|\overleftarrow{\mathrm{NH}}\right| = t|\boldsymbol{\alpha}| = t\sqrt{a^2 + b^c + c^2} = \frac{ax_n + by_n + cz_n + d}{a^2 + b^c + c^2}\sqrt{a^2 + b^c + c^2} = \frac{ax_0 + by_0 + cz_o + d}{\sqrt{a^2 + b^c + c^2}}$$

Q.E.D

ΔA′B′C′の面積

∠B′A′C′の角度を

$$\angle \mathrm{B'A'C'} = \theta$$

とします。

$\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}$ と $\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}$の内積を考えます。

$$\overleftarrow{\mathrm{B'A'}} = (-6 \quad 2 \quad -3)$$

$$\overleftarrow{\mathrm{C'A'}} = (-5 \quad 1 \quad -3)$$

$$\left|\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\left|\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

$$\overleftarrow{\mathrm{B'A'}} \cdot \overleftarrow{\mathrm{C'A'}} = (-6) \times (-5) + 2 \times 1 + (-3) \times (-3) = 41$$

$$\left|\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}\right|\left|\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}\right| \cos\theta = \overleftarrow{\mathrm{B'A'}} \cdot \overleftarrow{\mathrm{C'A'}}$$

$$\cos\theta = \frac{\overleftarrow{\mathrm{B'A'}} \cdot \overleftarrow{\mathrm{C'A'}}}{\left|\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}\right|\left|\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}\right|}$$

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = \frac{\left(\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}\cdot\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}\right)^2}{\left|\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}\right|^2\left|\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}\right|^2} = \frac{\left|\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}\right|^2\left|\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}\right|^2-\left(\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}\cdot\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}\right)^2}{\left|\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}\right|^2\left|\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}\right|^2}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\left|\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}\right|^2\left|\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}\right|^2-\left(\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}\cdot\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}\right)^2}}{\left|\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}\right|\left|\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}\right|}$$

S を $\Delta\mathrm{A'B'C'}$面積とすると

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\left|\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}\right|\left|\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}\right|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}\right|^2\left|\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}\right|^2-\left(\overleftarrow{\mathrm{B'A'}}\cdot\overleftarrow{\mathrm{C'A'}}\right)^2}$$

$$(\because \text{三角形の面積の公式: } \frac{1}{2}\times \textit{底辺}\times\textit{高さ})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{49\times 35-41^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1715-1681} = \frac{1}{2}\sqrt{34}$$

V_t: 三角錐 $\mathrm{OA'B'C'}$ *体積*

$$\mathrm{V}_t = \frac{1}{3}\times S\times \textit{高さ}\left(\textit{原点から平面の距離}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{34}\times\frac{|-1|}{\sqrt{34}} = \frac{1}{6}|-1|$$

$$\frac{\mathrm{V}_t}{\mathrm{V}_o} = \frac{\frac{1}{6}|-1|}{\frac{1}{6}} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4-30+8+32-10+3 = -1$$

以上によって、行列式が、返還前後の体積の比に一致することが確かめられました。