V-1-5. サラスの方法

多くの教科書で紹介されている行列式の計算方法はサラスの方法と言われる計算方法です。著者もサラスの方法をわかりやすい便利な行列式の計算方法として学びました。サラスの方法には、線形空間の理解につながる重要な情報が含まれています。ここでは、サラスの方法を紹介するとともに、その計算法が何故成り立つのか空間幾何学的に説明します。それによって線形代数学がより深く理解できると思います。

多次元空間での理論を２次元上で説明するのは、技術的に難しいので、 まず、2×2 の行列について二次元平面上で説明し、そこからの類推という形で、多次元に拡張します。図 50 には、２次元上の正方形を、2×2の行列で変換する例を示しました。

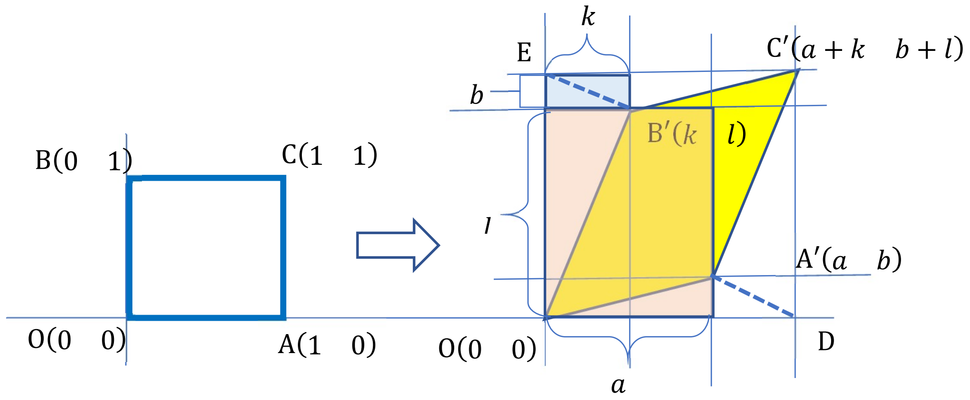

図 50. 単位正方形の変換

$$\text{変換のための行列は}\ \begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}$$

黄色で示した平行四辺形は、単位正方形を行列によって変形した結果です。一方、すでに示したように、行列式は次の通りです。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} = al - bk$$

V-1-4 でこれが、黄色い平行四辺形と単位正方形の面積比だということを説明しました。.

$$\frac{V_t}{V_u} = \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} = al - bk$$

$$V_t\text{: 黄色い平行四辺形の面積。}$$

$$V_u\text{: 単位正方形の面積}$$

$$V_u = 1$$

$$V_t = al - bk$$

ここで、幾何学的な方法で、黄色い平行四辺形の面積を求めます。

$$\text{正方形 OEC'D の面積} = \text{黄色い平形四辺形OB'C'A'} + \Delta\text{OEB}' + \Delta\text{EC}'\text{B}' + \Delta\text{DA}'\text{C}' + \Delta\text{OA}'\text{D}$$

$$\text{平形四辺形OB'C'A'の面積} = V_t$$

$$\text{OEC'D} = (a+k)(b+l)$$

$$\Delta\text{OEB}' = \Delta\text{DA}'\text{C}' = \frac{1}{2}k(b+l)$$

$$\Delta\text{EC}'\text{B}' = \Delta\text{OA}'\text{D} = \frac{1}{2}b(a+k)$$

$$\text{OEC'D} = V_t + \Delta\text{OEB}' + \Delta\text{EC}'\text{B}' + \Delta\text{DA}'\text{C}' + \Delta\text{OA}'\text{D}$$

$$V_t = \text{OEC'D} - \left(\Delta\text{OEB}' + \Delta\text{EC}'\text{B}' + \Delta\text{DA}'\text{C}' + \Delta\text{OA}'\text{D}\right)$$

$$= (a+k)(b+l) - k(b+l) - b(a+k)$$

$$= ak + al + kb + kl - kb - kl - ab - kb$$

$$= al - kb$$

黄色い平行四辺形の面積 (V_t)が行列式であることは確認できました。もとの正方形の面積が１ですから、これは行列による変形の面積の拡大倍率です。このこと自体は、何ら新しい情報ではありません。しかし、この図をみると気付くことがあります。

オレンジ色の長方形の面積はalで、薄い青い色の長方形の面積がkbです。つまり、黄色い平行四辺形の面積は、二つの長方形の面積の差なのです。この計算は縦軸、横軸を取り換えても成り立ちますし、以下のように足し算の形でも記述できます。

$$V_t = al + (-kb)$$

これがサラスの方法の基本です。これを多次元に拡張します。n 次元の空間から 1 次元を取り除きます。そこで、(n-1)次元の立体の体積（大きさ）を考えます。この大きさを n 次元から見た時の面積だと考えましょう。これは、(n-1)次元の行列式ですが、これを余因子行列と言います。取り除く 1 つの次元と余因子の組み合わせは n 個あります。正負の符号を含めた余因子と取り除いた次元方向の長さの積の総和が、行列式になるというのがサラスの方法の意味です。図 51 に示したように、長さを掛ける次元が一つ替わるごとに正負の符号が入れ替わります。

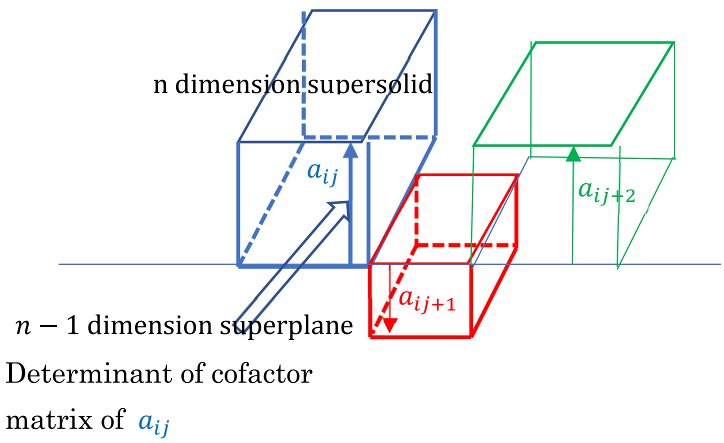

図 51. サラスの方法の考え方

数式を使って、この作業を説明します。
まず、取り除くべき次元のベクトルを、一番目の列だとします。その作業として、一番目の列の因子をその因子と n-1 個の 0 の和だと考えて、つぎのように変形します。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+0+\cdots+0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+0+\cdots+0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+0+\cdots+0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}+0+\cdots+0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0+a_{21}+\cdots+0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0+\cdots+0+a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

これは次のように、n 個の行列式の和になります

$$= \frac{1}{n}\begin{vmatrix} na_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \frac{1}{n}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ na_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \frac{1}{n}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ na_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

列を入れ替えます。行列演算のルールに従って、列を一つ入れ替えるごとに正負が変わります。

$$= \frac{(-1)^0}{n}\begin{vmatrix} na_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \frac{(-1)^1}{n}\begin{vmatrix} na_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\begin{vmatrix} na_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \end{vmatrix}$$

一番前の列に適当な係数をかけて他の列から差し引きます。行列計算のルールによって、正負の符号は変わりません。

$$= \frac{(-1)^0}{n}\begin{vmatrix} na_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \frac{(-1)^1}{n}\begin{vmatrix} na_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\begin{vmatrix} na_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^0}{n}\begin{vmatrix} na_{11} & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix} + \frac{(-1)^1}{n}\begin{vmatrix} na_{21} & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\begin{vmatrix} na_{n1} & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^0 a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^1 a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n1}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \end{vmatrix}$$

これが基本的な操作で、この操作を余因子展開と言います。それぞれの項の中の行列式についても同じ作業が行えますから、これを一段階ずつ n の数を減らしていけば、最終的に2×2の行列に係数をかけたものの和になります。また、これを、他の列についても行えば、最終的に政府の符号をつけた$n\times n$個の2×2の行列式の和となります。
2×2の行列の行列式はすでに説明しましたが、上記の方法で計算すると、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+0 & a_{12} \\ a_{21}+0 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+0 & a_{12} \\ 0+a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 2a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{vmatrix}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a_{21} & a_{22}\\ 0 & a_{12}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a_{11} & 0\\ 0 & a_{22}\end{vmatrix}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a_{21} & 0\\ 0 & a_{12}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a_{11} & 0\\ 0 & |a_{22}|\end{vmatrix}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a_{21} & a_{22}\\ 0 & |a_{12}|\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & |a_{22}|\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{21} & 0\\ 0 & |a_{12}|\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}|a_{22}|-a_{21}|a_{12}|=a_{11}a_{22}-a_{21a_{12}}$$

となります。

3×3の行列については

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}+0+0 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+0+0 & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}+0+0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}+0+0 & a_{12} & a_{13}\\ 0+a_{21}+0 & a_{22} & a_{23}\\ 0+0+a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}3a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\frac{1}{3}\begin{vmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ 3a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\frac{1}{3}\begin{vmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 3a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}3a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\frac{-1}{3}\begin{vmatrix}3a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\frac{1}{3}\begin{vmatrix}3a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ 0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}3a_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\frac{-1}{3}\begin{vmatrix}3a_{21} & 0 & 0\\ 0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\frac{1}{3}\begin{vmatrix}3a_{31} & 0 & 0\\ 0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}3a_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\frac{-1}{3}\begin{vmatrix}3a_{21} & 0 & 0\\ 0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\frac{1}{3}\begin{vmatrix}3a_{31} & 0 & 0\\ 0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}3a_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\frac{-1}{3}\begin{vmatrix}3a_{21} & 0 & 0\\ 0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\frac{1}{3}\begin{vmatrix}3a_{31} & 0 & 0\\ 0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

となって、2×2の行列で出来た余因子展開になって、これを実際に計算すると

$$=a_{11}\left(\begin{vmatrix}a_{22} & 0\\ 0 & |a_{33}|\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{23} & 0\\ 0 & |a_{32}|\end{vmatrix}\right)-a_{21}\left(\begin{vmatrix}a_{12} & 0\\ 0 & |a_{33}|\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{13} & 0\\ 0 & |a_{32}|\end{vmatrix}\right)+a_{31}\left(\begin{vmatrix}a_{12} & 0\\ 0 & |a_{23}|\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{13} & 0\\ 0 & |a_{22}|\end{vmatrix}\right)$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32})$$

結論を出す前に、念のために 4×4の行列についても計算します。

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}+0+0+0 & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0+a_{21}+0+0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0+0+a_{31}+0 & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ 0+0+0+a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}4a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\0&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}+\frac{1}{4}\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\4a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\0&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}+\frac{1}{4}\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\4a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\0&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}+\frac{1}{4}\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\4a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}4a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\0&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}4a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\0&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}+\frac{1}{4}\begin{vmatrix}4a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}4a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\\0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}4a_{11}&0&0&0\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\0&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}4a_{21}&0&0&0\\0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\0&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}+\frac{1}{4}\begin{vmatrix}4a_{31}&0&0&0\\0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}4a_{41}&0&0&0\\0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}-a_{41}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{vmatrix}$$

となって、

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}+a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$$

$$-a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}-a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$$

となります。n×n の行列について、一般化して書くととても長くなるので、図を使って計算手順を説明します。

1) まず、対角因子すべてを掛け合わせます。

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&a_{33}\\a_{n-11}&a_{n-12}&a_{n-13}&\cdots&a_{n-1n}\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

2) 次にその隣の列の 1 行目から右斜め下に向かってすべての因子を掛け合わせ、右端まで行ったら。その次の行のひだりはしに移って、右下方向にすべての因子を掛け合わせます。

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&a_{33}\\a_{n-11}&a_{n-12}&a_{n-13}&\cdots&a_{n-1n}\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

3) これを一番見尾の列まで繰り返します。

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&a_{33}\\a_{n-11}&a_{n-12}&a_{n-13}&\cdots&a_{n-1n}\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

4）一番右の列の第一行目から始まって、左下方向にすべての因子を掛け合わせます。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_{33} \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

5）次にその左隣の列の第一行から始まって、左下方向にすべての因子を掛け合わせ、一番左にたっしたら、その下の行の右の列に移って、下まですべての因子を掛け合わせます。.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_{33} \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

6）これを、一番下の列まで繰り返します。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_{33} \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

7）１）から３）の結果の和から４から６）の結果の和を差し引きます。

たとえば4×4の行列の行列式は次の通りになります。

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ g & h & i & j \\ k & l & m & n \\ s & t & u & v \end{vmatrix}$$

$$= ahmn + bins + cjkt + dglm - dils - chkv - bgnu - ajmt$$

以上がサラスの方法です。つまり、サラスの方法とは連続的な余因子展開です。