表示

V-1-6. 掃き出し法

行列式の計算法としてサラスの方法は一見確実な方法です。しかし、行列が大きくなると計算の過程が長くなり、コンピュータを使わないで計算する場合、計算間違いをする確率が高くなります。そのため、行列式の計算には「掃き出し法」が使われるのが一般的です。掃き出し法は、連立方程式の解法として一般的に使われる方法で、行や列の入れ替えと行・列の足し引きだけによって行列の次数を下げていく作業です。これを使えば、逆行列を計算する必要もありませし、行列や線形代数学の知識も必要ではありません。この解説の目的は、多変量解析のためにその基礎として線形代数学の知識の確認です。そのため、一般の教科書とは異なり、初めに掃き出し法を説明しませんでした。掃き出し法も行列の基本変形の一つであり、掃き出し法を知ることによって、不定解や不能解と行列の正則性の理解も容易になります。

掃き出し法による連立方程式の解法.

中学校で習った連立方程式の解法は掃き出し法です。
以下のような連立方程式を考えます。

$$ax + by + cz = \alpha \qquad \text{i}$$
$$kx + ly + mz = \beta \qquad \text{ii}$$
$$sx + ty + uz = \gamma \qquad \text{iii}$$

この連立方程式を行列絵描くと次のようになります。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

つぎのような拡大行列を作ってみます

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \vdots & \alpha \\ k & l & m & \vdots & \beta \\ s & t & u & \vdots & \gamma \end{pmatrix}$$

点線の左側の行列を行、列に入れ替えと足し合わせによって、単位行列にすることを考えます。

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \vdots & \alpha \\ k & l & m & \vdots & \beta \\ s & t & u & \vdots & \gamma \end{pmatrix}$$

第一行をaで割ります

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} & \vdots & \frac{\alpha}{a} \\ k & l & m & \vdots & \beta \\ s & t & u & \vdots & \gamma \end{pmatrix}$$

第二行から、第一列のk倍を差し引きます。

表示

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} & \vdots & \frac{\alpha}{a} \\ 0 & l-\frac{b}{a}k & m-\frac{c}{a}k & \vdots & \beta-\frac{\alpha}{a}k \\ s & t & u & \vdots & \gamma \end{pmatrix}$$

第３行から、第一列のs倍を差し引きます。

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} & \vdots & \frac{\alpha}{a} \\ 0 & l-\frac{b}{a}k & m-\frac{c}{a}k & \vdots & \beta-\frac{\alpha}{a}k \\ 0 & t-\frac{b}{a}s & u-\frac{c}{a}s & \vdots & \gamma-\frac{\alpha}{a}s \end{pmatrix}$$

第二行を$l-\frac{b}{a}k$で割ります。

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} & \vdots & \frac{\alpha}{a} \\ 0 & 1 & \frac{ma-kc}{a}\frac{a}{la-kb} & \vdots & \frac{\beta a-\alpha k}{a} \quad \frac{a}{la-kb} \\ 0 & t-\frac{b}{a}s & u-\frac{c}{a}s & \vdots & \gamma-\frac{\alpha}{a}s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} & \vdots & \frac{\alpha}{a} \\ 0 & 1 & \frac{ma-kc}{la-kb} & \vdots & \frac{\beta a-\alpha k}{la-kb} \\ 0 & t-\frac{b}{a}s & u-\frac{c}{a}s & \vdots & \gamma-\frac{\alpha}{a}s \end{pmatrix}$$

第１行から$\frac{b}{a}$×第２行を引きます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{c}{a}-\left(\frac{ma-kc}{la-kb}\right)\frac{b}{a} & \vdots & \frac{\alpha}{a}-\frac{\beta a-\alpha k}{la-kb}\frac{b}{a} \\ 0 & 1 & \frac{ma-kc}{la-kb} & \vdots & \frac{\beta a-\alpha k}{la-kb} \\ 0 & t-\frac{b}{a}s & u-\frac{c}{a}s & \vdots & \gamma-\frac{\alpha}{a}s \end{pmatrix}$$

第３行から$\left(t-\frac{s}{a}b\right)$×第２行を引きます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{c}{a}-\left(\frac{ma-kc}{la-kb}\right)\frac{b}{a} & \vdots & \frac{\alpha}{a}-\frac{\beta a-\alpha k}{la-kb}\frac{b}{a} \\ 0 & 1 & \frac{ma-kc}{la-kb} & \vdots & \frac{\beta a-\alpha k}{la-kb} \\ 0 & 0 & u-\frac{c}{a}s-\left(\frac{ta-sb}{a}\right)\left(\frac{ma-kc}{la-kb}\right) & \vdots & \gamma-\frac{\alpha}{a}s-\left(\frac{ta-sb}{a}\right)\left(\frac{\beta a-\alpha k}{la-kb}\right) \end{pmatrix}$$

表示

式が複雑になったので記号化して部分的に計算します。

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & A & \vdots & B \\ 0 & 1 & C & \vdots & D \\ 0 & 0 & E & \vdots & F\end{pmatrix}$$

$$A=\frac{c}{a}-\left(\frac{ma-kc}{la-kb}\right)\frac{b}{a}=\frac{lac-kbc-mab+kbc}{a(la-kb)}=\frac{lc-mb}{(la-kb)}$$

$$B=\ \frac{\alpha}{a}-\frac{\beta a-\alpha k}{la-kb}\frac{b}{a}=\frac{la\alpha-kb\alpha-\beta ab+\alpha kb}{a(la-kb)}=\frac{l\alpha-\beta b}{(la-kb)}$$

$$C=\frac{ma-kc}{la-kb}$$

$$D=\frac{\beta a-\alpha k}{la-kb}$$

$$E=u-\frac{c}{a}s-\left(\frac{ta-sb}{a}\right)\left(\frac{ma-kc}{la-kb}\right)=\frac{au-cs}{a}-\left(\frac{(ta-sb)(ma-kc)}{a(la-kb)}\right)$$

$$=\frac{(au-cs)(la-kb)-(ta-sb)(ma-kc)}{a(la-kb)}$$

$$=\frac{a^2lu-acls-abku+bcks-a^2mt+abms+ackt-bcks}{a(la-kb)}$$

$$=\frac{a(alu-cls\ -bku-amt+bms+ckt)}{a(la-kb)}$$

$$=\frac{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt}{la-kb}$$

$$F=\gamma-\frac{\alpha}{a}s-\left(\frac{ta-sb}{a}\right)\left(\frac{\beta a-\alpha k}{la-kb}\right)$$

$$=\frac{(a\gamma-\alpha s)(la-kb)-(ta-sb)(\beta a-\alpha k)}{a(la-kb)}$$

$$=\frac{a^2\gamma l-a\alpha ls-ab\gamma k+b\alpha ks-a^2\beta t+ab\beta s+a\alpha kt-b\alpha ks}{a(la-kb)}$$

$$=\frac{a(a\gamma l-\alpha ls-b\gamma k-a\beta t+b\beta s+\alpha kt)}{a(la-kb)}$$

$$=\frac{al\gamma+b\beta s+\alpha kt-\alpha ls-bk\gamma-a\beta t}{la-kb}$$

第 3 行を E で割ります。

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & A & \vdots & B \\ 0 & 1 & C & \vdots & D \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{F}{E}\end{pmatrix}$$

表示

$$\frac{F}{E}=\frac{al\gamma+b\beta s+\alpha kt-\alpha ls-bk\gamma-a\beta t}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt}$$

第２行からＣ×第３行を引きます。

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & A & \vdots & B \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & D-\frac{F}{E}C \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{F}{E}\end{pmatrix}$$

$$D-\frac{F}{E}C=\frac{\beta a-\alpha k}{la-kb}-\frac{al\gamma+b\beta s+\alpha kt-\alpha ls-bk\gamma-a\beta t}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt}\times\frac{ma-kc}{la-kb}$$

$$=\frac{(\beta a-\alpha k)(alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt)-(al\gamma+b\beta s+\alpha kt-\alpha ls-bk\gamma-a\beta t)(ma-kc)}{(la-kb)(alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt)}$$

分子について

$$\beta aalu+\beta abms+\beta ackt-\beta acls-\beta abku-\beta aamt-\alpha kalu-\alpha kbms-\alpha kckt+\alpha kcls+\alpha kbku+\alpha kamt$$

$$-maal\gamma-mab\beta s-ma\alpha kt+ma\alpha ls+mabk\gamma+maa\beta t+kcal\gamma+kcb\beta s+kc\alpha kt-kc\alpha ls-kcbk\gamma-kca\beta t$$

$$=\beta aalu-\beta acls-\beta abku-\alpha kalu-\alpha kbms+\alpha kbku-maal\gamma+ma\alpha ls+mabk\gamma+kcal\gamma+kcb\beta s-kcbk\gamma$$

$$=ala\beta u+al\alpha ms+alkc\gamma-alc\beta s-al\alpha ku-alam\gamma-kba\beta u-kb\alpha ms-kbck\gamma+kbc\beta s+kb\alpha ku+kbam\gamma$$

$$=(la-kb)(a\beta u+\alpha ms+kc\gamma-c\beta s-\alpha ku-am\gamma)$$

$$D-\frac{F}{E}C=\frac{(la-kb)(a\beta u+\alpha ms+kc\gamma-c\beta s-\alpha ku-am\gamma)}{(la-kb)(alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt)}=\frac{a\beta u+\alpha ms+kc\gamma-c\beta s-\alpha ku-am\gamma}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt}$$

第１行からＡ×第３行を引きます。

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & B-\frac{F}{E}A \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & D-\frac{F}{E}C \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{F}{E}\end{pmatrix}$$

$$B-\frac{F}{E}A=\frac{l\alpha-\beta b}{(la-kb)}-\frac{al\gamma+b\beta s+\alpha kt-\alpha ls-bk\gamma-a\beta t}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt}\times\frac{lc-mb}{(la-kb)}$$

$$=\frac{(l\alpha-\beta b)(alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt)-(al\gamma+b\beta s+\alpha kt-\alpha ls-bk\gamma-a\beta t)(lc-mb)}{(la-kb)(alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt)}$$

分子について

$$\alpha al^2u+\alpha blms+\alpha cklt-\alpha cl^2s-\alpha blku-\alpha almt-\beta ablu-\beta b^2ms-\beta bckt+\beta bcls+\beta b^2ku+\beta abmt$$

$$-\gamma acl^2-\beta bcls-\alpha cklt+\alpha cl^2s+\gamma bclk+\beta aclt+\gamma ablm+\beta b^2ms+\alpha bkmt-\alpha blms-mb^2k\gamma-\beta abmt$$

$$=\alpha al^2u-\alpha blku-\alpha almt-\beta ablu-\beta bckt+\beta b^2ku-\gamma acl^2+\gamma bclk+\beta aclt+\gamma ablm+\alpha bkmt-mb^2k\gamma$$

$$=la\alpha lu+labm\gamma+lac\beta t-lacl\gamma-lab\beta u-la\alpha mt-kb\alpha lu-kbc\beta t-kbbm\gamma+kbcl\gamma+kbb\beta u+kb\alpha mt$$

$$=(la-kb)(\alpha lu+bm\gamma+c\beta t-cl\gamma-b\beta u-\alpha mt)$$

表示

$$B-\frac{F}{E}A=\frac{(la-kb)(\alpha lu+bm\gamma+c\beta t-cl\gamma-b\beta u-\alpha mt)}{(la-kb)(alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt)}=\frac{\alpha lu+bm\gamma+c\beta t-cl\gamma-b\beta u-\alpha mt}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \dfrac{\alpha lu+bm\gamma+c\beta t-cl\gamma-b\beta u-\alpha mt}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \dfrac{a\beta u+\alpha ms+kc\gamma-c\beta s-\alpha ku-am\gamma}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \dfrac{al\gamma+b\beta s+\alpha kt-\alpha ls-bk\gamma-a\beta t}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha lu+bm\gamma+c\beta t-cl\gamma-b\beta u-\alpha mt}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt} \\ \dfrac{a\beta u+\alpha ms+kc\gamma-c\beta s-\alpha ku-am\gamma}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt} \\ \dfrac{al\gamma+b\beta s+\alpha kt-\alpha ls-bk\gamma-a\beta t}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt} \end{pmatrix}$$

$$x=\frac{\alpha lu+bm\gamma+c\beta t-cl\gamma-b\beta u-\alpha mt}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt}=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & b & c \\ \beta & l & m \\ \gamma & t & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}$$

$$y=\frac{a\beta u+\alpha ms+kc\gamma-c\beta s-\alpha ku-am\gamma}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt}=\frac{\begin{vmatrix} a & \alpha & c \\ k & \beta & m \\ s & \gamma & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}$$

$$z=\frac{al\gamma+b\beta s+\alpha kt-\alpha ls-bk\gamma-a\beta t}{alu+bms+ckt-cls\ -bku-amt}=\frac{\begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ k & l & \beta \\ s & t & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}$$

以上で掃き出し法によって解が得られます。この右辺は、V-1-8 で説明するクラメルの公式による解になっています。ここでは、分母に着目して以下の等式を確認してください。

$$\begin{vmatrix} \alpha & b & c \\ \beta & l & m \\ \gamma & t & u \end{vmatrix}=\alpha lu+bm\gamma+c\beta t-cl\gamma-b\beta u-\alpha mt$$

この連立方程式の解法は複雑に見えますが、私たちが中学校で習った連立方程式の解法と同じです。実際に計算してみると、それほど複雑でも難しくもありません。

以下の連立方程式の解を求めています。

$$2x+4y+3z=1$$

$$x-5y-4z=3$$

$$2x-y-z=3$$

式の順番を入れ替えます。

$$x-5y-4z=3$$

$$2x+4y+3z=1$$

表示

$$2x-y-z=3$$

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & -4\\ 2 & 4 & 3\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

拡大行列の形にします。

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & -4 & \vdots & 3\\ 2 & 4 & 3 & \vdots & 1\\ 2 & -1 & -1 & \vdots & 3\end{pmatrix}$$

第 2 行から 2 × 第 1 行、第 3 行から 2 × 第 1 行を引きます。

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & -4 & \vdots & 3\\ 0 & 14 & 11 & \vdots & -5\\ 0 & 9 & 7 & \vdots & -3\end{pmatrix}$$

第 2 行を 14 で割ります。

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & -4 & \vdots & 3\\ 0 & 1 & \frac{11}{14} & \vdots & \frac{-5}{14}\\ 0 & 9 & 7 & \vdots & -3\end{pmatrix}$$

第 1 行から(-5) × 第 2 行、第 3 行から 9 × 第 2 行を引きます。

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -4+\frac{55}{14} & \vdots & 3+\frac{-25}{14}\\ 0 & 1 & \frac{11}{14} & \vdots & \frac{-5}{14}\\ 0 & 0 & 7-\frac{99}{14} & \vdots & -3+\frac{45}{14}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{14} & \vdots & \frac{17}{14}\\ 0 & 1 & \frac{11}{14} & \vdots & \frac{-5}{14}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{14} & \vdots & \frac{3}{14}\end{pmatrix}$$

第 3 行を$\left(-\frac{1}{14}\right)$で割ります。

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{14} & \vdots & \frac{17}{14}\\ 0 & 1 & \frac{11}{14} & \vdots & \frac{-5}{14}\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3\end{pmatrix}$$

第 1 行から$\left(-\frac{1}{14}\right)$× 第 3 行、第 2 行から$\frac{11}{14}$× 第 3 行を引きます。

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{14}{14}\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{28}{14}\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3\end{pmatrix}$$

表示

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1\\0 & 1 & 0 & \vdots & 2\\0 & 0 & 1 & \vdots & -3\end{pmatrix}$$

$$x=1, y=2, z=-3$$

これで解が得られます。計算の過程はそう複雑ではありません。しかし、もっと機械的に解を求めるならば、V-1-8 で説明するクラメルの方法で解くこともできますが、掃き出し法を理解することによって、行列の正則性と連立方程式の解の関係が理解できます。

次の連立方程式を解いてみます。

$$x-5y-4z=3$$

$$2x+4y+3z=1$$

$$3x-y-z=4$$

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & -4 & \vdots & 3\\2 & 4 & 3 & \vdots & 1\\3 & -1 & -1 & \vdots & 4\end{pmatrix}$$

第 2 行から 2 × 第 1 行、第 3 行から 3 × 第 1 行を引きます。

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & -4 & \vdots & 3\\0 & 14 & 11 & \vdots & -5\\0 & 14 & 11 & \vdots & -5\end{pmatrix}$$

第 3 行から第 2 行を引きます。

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & -4 & \vdots & 3\\0 & 14 & 11 & \vdots & -5\\0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

第３行がすべて０になって、左側に単位行列を作ることが出来ません。

第２行を 14 で割ります。

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & -4 & \vdots & 3\\0 & 1 & \frac{11}{14} & \vdots & \frac{-5}{14}\\0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

第１行に**5** × 第 2 行をたす。

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{14}\\0 & 1 & \frac{11}{14}\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{17}{14}\\\frac{-5}{14}\\0\end{pmatrix}$$

$$x-\frac{z}{14}=\frac{17}{14}$$

$$y+\frac{11}{14}z=\frac{-5}{14}$$

これを満たすx, y, zはすべて解です。例えば、$x=1, y=2, z=-3$下記のように連立方程式を満たします。

$$1-5(2)-4(-3)=3$$

$$2(1)+4(2)+3(-3)=1$$

表示

$$3(1)-(2)-(-3)=4$$

しかし、$x=\frac{9}{7}, y=-\frac{8}{7}, z=1$も下記のように連立方程式を満たします。

$$\frac{9}{7}-5\left(-\frac{8}{7}\right)-4(1)=3$$

$$2\left(\frac{9}{7}\right)+4\left(-\frac{8}{7}\right)+3(1)=1$$

$$3\left(\frac{9}{7}\right)-\left(-\frac{8}{7}\right)-(1)=4$$

このように、連立方程式を充たすx, y, zは無限にあり、答えは未定です。そもそも、連立方程式の 3 つ目の式は、1 番目の式と 2 番目の式の和です。つまり、未知数が 3 つあるにもかかわらず、本当は式が 2 つしかないのです。拡大行列のどこかの行が 0 になってしまう場合、右の部分も 0 であれば解は未定です。この場合、行列は実際には正方行列ではありません。この場合、行列を正則でない（irregular）と言います。右の部分が 0 でない場合には、そのような解はあり得ませんから、解なしです。

掃き出し法による行列式の計算

3×3の行列

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & l-\frac{bk}{a} & m-\frac{ck}{a} \\ 0 & t-\frac{bs}{a} & u-\frac{cs}{a} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & l-\frac{bk}{a} & m-\frac{ck}{a} \\ 0 & t-\frac{bs}{a} & u-\frac{cs}{a} \end{vmatrix}$$

$$a\begin{vmatrix} \frac{al-bk}{a} & \frac{am-ck}{a} \\ \frac{at-bs}{a} & \frac{au-cs}{a} \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} \frac{al-bk}{a} & \frac{am-ck}{a} \\ 0 & \frac{au-cs}{a}-\frac{am-ck}{al-bk}\cdot\frac{at-bs}{a} \end{vmatrix}$$

$$=$$

表示

$$= a\begin{vmatrix} \frac{al-bk}{a} & 0 \\ 0 & \frac{(au-cs)(al-bk)-(am-ck)(at-bs)}{a(al-bk)} \end{vmatrix}$$

$$(al-bk)\left|\frac{a^2lu-abku-acls+bcks-a^2mt+abms+ackt-bcks}{a(al-bk)}\right|$$

$$= (al-bk)\left|\frac{a(alu-bku-cls-amt+bms+ckt)}{a(al-bk)}\right|$$

$$= (al-bk)\left|\frac{(alu+bms+ckt-cls-bku-amt)}{(al-bk)}\right|$$

$$= alu+bms+ckt-cls-bku-amt$$

4×4の行列の具体例

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -8 & 1 & -8 \\ 0 & -3 & 6 & -8 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & -8 \\ 0 & -3 & 6 & -8 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -8 & 1 & -8 \\ -3 & 6 & -8 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -8 \\ 6 & -3 & -8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 0 \\ 6 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 45 & -5 \\ 1 & 12 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & -5 \\ 0 & 12 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 45 & -5 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 12 \\ -5 & 45 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -5 & 45 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = -30$$

掃き出し法による逆行列の求め方.

コンピュータを使った計算では、V-1-7 で説明する余因子行列を使って逆行列を求めるのが一般的です。しかし、掃き出し法を使って逆行列を求めることもできます。以下に具体的な例を使って、計算手順を示します。

以下の行列を例にします。

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

つぎのように、右側に単位行列がある拡大行列を作ります。

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

考え方は、逆行列とは掛け合わせたときに単位行列になる行列です。ですから、右側にある単位行列を左側に移した時に、右側にできる行列が逆行列です。

表示

第 2 行から 2 × 第 1 行列、第 3 行から 2 × 第 1 行列を引きます。

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 11 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & \vdots & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第 2 行を 14 で割る。

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{14} & \vdots & -\frac{1}{7} & \frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 9 & 7 & \vdots & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第 1 行から(-5) × 第 2 行、第 3 行から 9 × 第 2 行を引きます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4+\frac{55}{14} & \vdots & 1-\frac{5}{7} & \frac{5}{14} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{14} & \vdots & -\frac{1}{7} & \frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 7-\frac{99}{14} & \vdots & -2+\frac{9}{7} & -\frac{9}{14} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{14} & \vdots & \frac{2}{7} & \frac{5}{14} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{14} & \vdots & -\frac{1}{7} & \frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{14} & \vdots & -\frac{5}{7} & -\frac{9}{14} & 1 \end{pmatrix}$$

第 3 行を$\left(-\frac{1}{14}\right)$で割ります。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{14} & \vdots & \frac{2}{7} & \frac{5}{14} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{14} & \vdots & -\frac{1}{7} & \frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 10 & 9 & -14 \end{pmatrix}$$

第 1 行から$\left(-\frac{1}{14}\right)$ × 第 3 行、第 2 行から $\frac{11}{14}$ × 第 3 行を引きます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{2}{7}+\frac{5}{7} & \frac{5}{14}+\frac{9}{14} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{11}{14} & \vdots & -\frac{1}{7}-\frac{110}{14} & \frac{1}{14}-\frac{99}{14} & 11 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 10 & 9 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{112}{14} & -\frac{98}{14} & 11 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 10 & 9 & -14 \end{pmatrix}$$

表示

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{112}{14} & -\frac{98}{14} & 11 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 10 & 9 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -8 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 10 & 9 & -14 \end{pmatrix}$$

確認します。

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -8 & -7 & 11 \\ 10 & 9 & -14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-5) \times (-8) + (-4) \times 10 & 1 \times 1 + (-5) \times (-7) + (-4) \times 9 & 1 \times (-1) + (-5) \times 11 + (-4) \times (-14) \\ 2 \times 1 + 4 \times (-8) + 3 \times 10 & 2 \times 1 + 4 \times (-7) + 3 \times 9 & 2 \times (-1) + 4 \times 11 + 3 \times (-14) \\ 2 \times 1 + (-1) \times (-8) + (-1) \times 10 & 2 \times 1 + (-1) \times (-7) + (-1) \times 9 & 2 \times (-1) + (-1) \times 11 + (-1) \times (-14) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$