

V-1-8. 余因子行列と逆行列

逆行列の使い方と掃き出し法による逆行列の求め方を説明しましたが、一般的には、余因子行列を行列式で割るという方法で逆行列を作ります。V-1-5 のサラスの方法の説明で余因子行列を使っていますが、余因子行列の説明はしませんでした。ここで余因子行列と余因子行列による逆行列の作り方を説明します。

まず、余因子と余因子行列について説明します。

1. 余因子とは、行列のある因子に着目したときに、その因子が属する行と列を取り除いた行列の行列式のことである。
2. 余因子行列とは、行列の因子を余因子で入れ替えて、正負の符号をつけて、行と列を転置したものである。
3. 逆行列は余因子行列の転置行列を元の行列の行列式で割ったものである。

大変シンプルな表現ですが、何を言っているのかわかりません。図を使って説明します。ある因子 a_{ij} の余因子とは、図 52 の青い部分の因子を取り除いた行列の行列式です。

1. 余因子を作る

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

図 52. 余因子の説明(青い部分を取り除く)

得られる行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

得られる行列式 (余因子)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. 余因子に符号をつける。行番号と列番号の和が偶数であれば正、奇数であれば負とする。

ここで、筆者がこの説明のためだけに作った記述法を提案します。わかりやすくするため

に作ったローカルルールです。

a_{ij} の余因子を作るための行列を A^{ij} 、余因子を a^{ij} と表すことにします添え字が上付きになることと文字の色が赤くなることで、 a_{ij} の余因子であるとわかります。

$$A^{ij} = (-1)^{i+j} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a^{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

これに符号をつけます。ルールに従えば、次のように負号が付くことになります。

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

これを白黒で表すと図 53 のような市松模様になります。

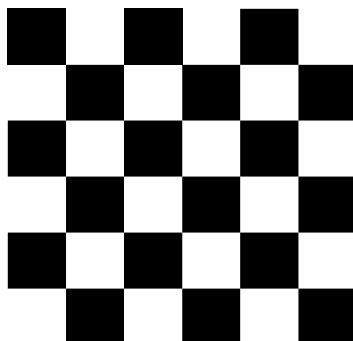


図. 53. 市松模様

この行列の行と列を入れ替えます。

このルールを使って $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$ という行列の場合について、余因子行列を計算します。

余因子で作った行列 B は次のようになります。

$$B = \begin{pmatrix} |l & m| & -|k & m| & |k & l| \\ |t & u| & -|s & u| & |s & t| \\ -|b & c| & |a & c| & -|a & b| \\ |t & u| & |s & u| & -|s & t| \\ |b & c| & -|a & c| & |a & b| \\ |l & m| & -|k & m| & |k & l| \end{pmatrix}$$

転置行列とは、行列の行と列を入れ替えたものです。転置行列にはさまざまな記述に仕方

があります。たとえば、 B^T, B^t, B' 等がありますが、ここでは B^T という記述法を使います。

$$B^T = \begin{pmatrix} a^{11} & \dots & a^{1j} & \dots & a^{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^{i1} & & a^{ij} & & a^{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^{n1} & \dots & a^{nj} & \dots & a^{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a^{11} & \dots & a^{i1} & \dots & a^{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^{1j} & & a^{ij} & & a^{nj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^{1n} & \dots & a^{in} & \dots & a^{nn} \end{pmatrix}$$

この転置行列を行列 A の余因子行列といい、 \tilde{A} と表します。

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a^{11} & \dots & a^{1j} & \dots & a^{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^{i1} & & a^{ij} & & a^{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^{n1} & \dots & a^{nj} & \dots & a^{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a^{11} & \dots & a^{i1} & \dots & a^{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^{1j} & & a^{ij} & & a^{nj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^{1n} & \dots & a^{in} & \dots & a^{nn} \end{pmatrix}$$

例として挙げた

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

では

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} |l & m| & -|b & c| & |b & c| \\ -|k & m| & |a & c| & -|a & c| \\ |k & l| & -|a & b| & |a & b| \\ |s & u| & |s & u| & -|k & m| \\ |s & t| & -|s & t| & |k & l| \end{pmatrix}$$

式 52

3. 余因子行列(\tilde{A})を A の行列式 $|A|$ で割ったものが逆行列です。

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}$$

式 53

3×3 の行列の例では、

$$A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} |l & m| & -|b & c| & |b & c| \\ -|k & m| & |a & c| & -|a & c| \\ |k & l| & -|a & b| & |a & b| \\ |s & u| & |s & u| & -|k & m| \\ |s & t| & -|s & t| & |k & l| \end{pmatrix}$$

式 54

これが、余因子行列を使って逆行列を作る計算方法です。計算方法としては、掃き出し法によって逆行列を作る方が簡単です。いずれにしても、行列式や逆行列の計算は手順が長く面倒なものです。コンピュータを使わずに手計算でこれを行う場合、間違わずに計算するのはほとんど不可能に思えます。コンピュータを使って計算するのが普通でしょう。Microsoft Excelをはじめ様々な表計算ソフトがあるので、それらを利用してください。行

列式や逆行列を計算する関数があるはずですが。そのような理由で、著者は計算方法に多くのスペースを使いたくないと思っています。その代わりに、例えば座標変換による拡大倍率としての行列式という説明のように、線形代数的な概念の説明を丁寧にするというのが、この解説の基本的な方針です。このような基本方針に従って、余因子行列を使った逆行列の計算法を紹介しました。

式 53 の両辺に元の行列 A をかけてみます。

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}$$

$$AA^{-1} = A \frac{\tilde{A}}{|A|}$$

左辺は逆行列の定義によって、単位行列ですから、

$$I = \frac{A\tilde{A}}{|A|}$$

$$A\tilde{A} = |A|I$$

行列式はスカラーですから、元の行列に余因子行列を掛けた結果は、単位行列の行列式倍になるということです。ここで、余因子行列について考えます。

実は、V-1-5 のサラスの方法のところで、すでに余因子行列の考え方を使っています。サラスの方法は行列式の計算法です。

線形代数（行列計算）は多次元空間を考えますが、多次元空間を図示するのは難しいので、一般の n 次元空間を 3 次元空間で代表させたのが図 54 です。ここでは、平面とそれに直交するベクトルを考えて、平面の面積にベクトルの長さをかけて、立体の体積を求めます。この体積が、その平面とベクトルが作る行列式だと考えます。これは一種の比喻で、3 次

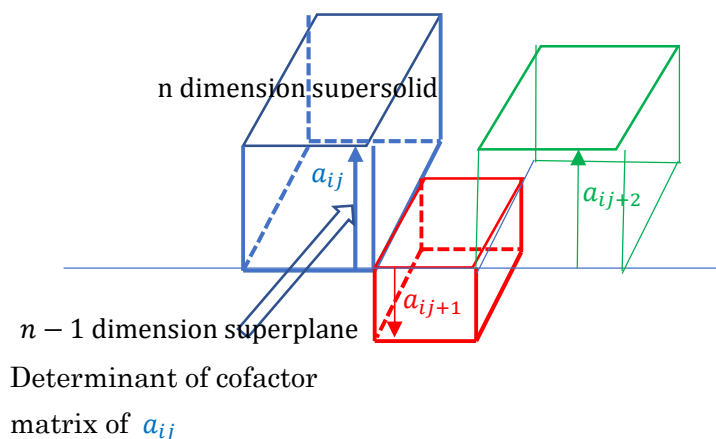


図 54. サラスの方法の考え方

元空間を n 次元空間とすると、平面はある 1 次元を取り除いた $n-1$ 次元空間で面積はその大きさであり、取り除いた方向のベクトルの長さをかけたものが、ベクトルと $n-1$ 次元空間の大きさがつくる、 n 次元空間の広がりです。二次元空間で説明したように、その空間の広がり、ベクトルが一つ替わるごとに、正負が変わります。ある一つベクトルは、複数の直交ベクトルの線形結合（複数のベクトルの整数倍の和）で表せます。一つの因子を一つのベクトルと考えて、その行と列の成分を含まない因子の行列を $n-1$ 次の広がりと考えて、ベクトルの長さをかけて、 n 次元の広がりを計算することが出来ます。

V-1-5 のサラスの方法で使った行列式の変形と途中まで同じことをします。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + 0 + \cdots + 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + 0 + \cdots + 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + 0 + \cdots + 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_{11} + 0 + \cdots + 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 + a_{21} + \cdots + 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 + \cdots + 0 + a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

これは次のように、 n 個の行列式の和になります

$$= \frac{1}{n} \begin{vmatrix} na_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \frac{1}{n} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ na_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \frac{1}{n} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ na_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

列を入れ替えます。行列演算のルールに従って、列を一つ入れ替えるごとに正負が変わります。

$$= \frac{(-1)^0}{n} \begin{vmatrix} na_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \frac{(-1)^1}{n} \begin{vmatrix} na_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \begin{vmatrix} na_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n} \end{vmatrix}$$

一番前の列に適切な係数をかけて他の列から差し引きます。行列計算のルールによって、正負の符号は変わりません。

$$= \frac{(-1)^0}{n} \begin{vmatrix} na_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \frac{(-1)^1}{n} \begin{vmatrix} na_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \begin{vmatrix} na_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n} \end{vmatrix}$$

この行列式が次のように計算することできることは図 51 で説明しました。

$$= \frac{(-1)^0}{n} \begin{vmatrix} na_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \frac{(-1)^1}{n} \begin{vmatrix} na_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \begin{vmatrix} na_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n} \end{vmatrix} \\ = (-1)^0 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^1 a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^0 a_{11} a^{11} + (-1)^1 a_{21} a^{21} + \dots + (-1)^{n-1} a_{n1} a^{n1}$$

これは、第一列についてですから、第二列以降についても同じことが出来ますので、この行列式は

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^0 a_{11} a^{11} + (-1)^1 a_{12} a^{12} + \dots + (-1)^{n-1} a_{1n} a^{1n} \\ & \quad + (-1)^1 a_{21} a^{21} + (-1)^2 a_{22} a^{22} + (-1)^n a_{12} a^{2n} \\ & \quad \vdots \\ & \quad + (-1)^{n-1} a_{n1} a^{n1} + (-1)^n a_{n1} a^{n2} + \dots + (-1)^{2n-2} a_{12} a^{nn} \end{aligned}$$

と表せます。これは、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1-2} a^{11} & (-1)^{1+2-2} a^{21} & \cdots & (-1)^{1+2-2} a^{n1} \\ (-1)^{2+1-2} a^{12} & (-1)^{2+2-2} a^{22} & \cdots & (-1)^{2+n-2} a^{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1-2} a^{1n} & (-1)^{n+2-2} a^{2n} & \cdots & (-1)^{n+n-2} a^{nn} \end{pmatrix}$$

という行列の積の行列式です。2つ目の行列は明らかに余因子行列ですから、

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1-2} a^{11} & (-1)^{1+2-2} a^{21} & \cdots & (-1)^{1+2-2} a^{n1} \\ (-1)^{2+1-2} a^{12} & (-1)^{2+2-2} a^{22} & \cdots & (-1)^{2+n-2} a^{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1-2} a^{1n} & (-1)^{n+2-2} a^{2n} & \cdots & (-1)^{n+n-2} a^{nn} \end{pmatrix}$$

つまり

$$|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|$$

ということです。行列式はスカラーですから、両辺を $|\mathbf{A}|$ でわると

$$\left| \mathbf{A} \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{|\mathbf{A}|} \right| = 1$$

という行列式の演算になりますが、これをn次元空間での行列演算の形にするために、スカラーである右辺の1を、行列式が1になるn次元の単位行列にします。

$$\mathbf{A} \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{|\mathbf{A}|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

したがって、 $\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{|\mathbf{A}|}$ は \mathbf{A} の逆行列です。

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} a^{11} & a^{21} & \cdots & a^{n1} \\ a^{12} & a^{22} & \cdots & a^{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{1n} & a^{2n} & \cdots & a^{nn} \end{pmatrix}$$

以上が、余因子行列を行列式で割ったものが、逆行列であることの証明です。