V-1-10. 行列の分離

行列をいくつかの部分行列に分離する必要がある場合があります。ここでは、行列を分離したときに、行列の積が元の部分行列でどのように表せるのかを考えます。
行列を部分行列で表すとは次のようなことです。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1q} & a_{1q+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \boldsymbol{A}_{11} & \vdots & \vdots & \boldsymbol{A}_{12} & \vdots\\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & a_{pq+1} & \cdots & a_{pn}\\ \hline a_{p+11} & \cdots & a_{p+11} & a_{p+1\,q+1} & \cdots & a_{p+1\,q+1}\\ \vdots & \boldsymbol{A}_{21} & \vdots & \vdots & \boldsymbol{A}_{22} & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & a_{nq+1} & \cdots & a_{nn}\end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & \cdots & b_{1p} & b_{1p+1} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \boldsymbol{B}_{11} & \vdots & \vdots & \boldsymbol{B}_{12} & \vdots\\ b_{q1} & \cdots & b_{qp} & b_{qp+1} & \cdots & b_{qn}\\ \hline b_{q+1\,1} & \cdots & b_{q+1\,p} & b_{q+1p+1} & \cdots & b_{q+1n}\\ \vdots & \boldsymbol{B}_{21} & \vdots & \vdots & \boldsymbol{B}_{22} & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{n\,p} & b_{n\,p+1} & \cdots & b_{n\,n}\end{array}\right)$$

ここで、行列$\boldsymbol{AB}$の積を考えます。

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22}\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21}: p\times p\ \textit{正方行列}$$

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22}: (n-p)\times\ (n-p)\ \textit{正方行列}$$

式 58

具体的な例を挙げます。

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\\ 1 & -2\\ -1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

という行列の掛け算です。第一の行列の行の数と第二の行列の列の数が同じだからこの行列の掛け算は可能です。第一の行列の列の分割と第二の行列の行の分割をそろえて、例えば、次のように分割します。

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc}1 & 2 & 4 & 5 & 1\\ \hline 0 & 2 & 1 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}-1 & 2\\ 0 & 3\\ \hline 1 & -2\\ \hline -1 & 1\\ 2 & -3\end{array}\right)$$

。

これを部分行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} \\ \boldsymbol{B}_{21} \\ \boldsymbol{B}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} + \boldsymbol{A}_{13}\boldsymbol{B}_{31} \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} + \boldsymbol{A}_{23}\boldsymbol{B}_{31} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{12} = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{13} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

となります。部分行列の掛け算ごとに計算します。

$$\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} + \boldsymbol{A}_{13}\boldsymbol{B}_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times 0 & 1 \times 2 + 2 \times 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \times 1 & 4 \times (-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \times (-1) + 1 \times 2 & 5 \times 1 + 1 \times (-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} + \boldsymbol{A}_{23}\boldsymbol{B}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \times (-1) + 2 \times 0 & 0 \times 2 + 2 \times 3 \\ 3 \times (-1) + 0 \times 0 & 3 \times 2 + 0 \times 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \times 1 & 1 \times (-2) \\ 2 \times 1 & 2 \times (-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \times (-1) + 3 \times 2 & 1 \times 1 + 3 \times (-3) \\ 0 \times (-1) + 1 \times 2 & 0 \times 1 + 1 \times (-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} + \boldsymbol{A}_{13}\boldsymbol{B}_{31} \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} + \boldsymbol{A}_{23}\boldsymbol{B}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \hline 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となります。念のため直接行列の掛け算をやってみます。

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1\times(-1)+2\times 0+4\times 1+5\times(-1)+1\times 2 & 1\times 2+2\times 3+4\times(-2)+5\times 1+1\times(-3) \\ 0\times(-1)+2\times 0+1\times 1+1\times(-1)+3\times 2 & 0\times 2+2\times 3+1\times(-2)+1\times 1+3\times(-3) \\ 3\times(-1)+0\times 0+2\times 1+0\times(-1)+1\times 2 & 3\times 2+0\times 3+2\times(-2)+0\times 1+1\times(-3) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -1+0+4-5+2 & 2+6-8+5-3 \\ 0+0+1-1+6 & 0+6-2+1-9 \\ -3+0+2-0+2 & 6+0-4+0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

確かに部分行列ごとの掛け算として計算しても、直接計算しても同じ結果になります。