V-2. 行列計算の発展

V-2-1. 相似

行列の相似

行列の相似という概念について説明します。行列の相似は次のように定義されています。

行列 $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$が次のような関係にあるとき、行列 $\boldsymbol{C}$と $\boldsymbol{D}$を相似であるという。

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P^{-1}DP}$$

式 59

つまり、この様な関係になる行列 P が存在するとき、$\boldsymbol{C}$と $\boldsymbol{D}$は相似であるといいます。

この定義の意味を３x３の行列を例にあげて説明します。

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$|\boldsymbol{P}| = (2+2+1) - (1+4+1) = -1$$

$$\boldsymbol{P}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P^{-1}} = \frac{1}{|P|}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

念のために、ここで、$\boldsymbol{PP^{-1}} = \boldsymbol{I}$を確認しましょう。

$$\boldsymbol{PP^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+2+0 & 3-2-1 & -1+0+1 \\ -1+1+0 & 3-1-1 & -1+0+1 \\ -1+1+0 & 3-1-2 & -1+0+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以上で、

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\1&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

が確認されました。

次に、$\boldsymbol{P^{-1}}DP$=Cとして

D と Cが相似であることを確認します。

$$\boldsymbol{P^{-1}D}=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\1&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3&12&-1\\3&-4&0\\0&-4&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P^{-1}}\mathbf{DP}=\begin{pmatrix}-3&12&-1\\3&-4&0\\0&-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3+12-1&-6+12-1&-3+12-2\\3-4+0&6-4+0&3-4+0\\0-4+1&0-4+1&0-4+2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8&5&7\\-1&2&-1\\-3&-3&-2\end{pmatrix}$$

ということで、

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}8&5&7\\-1&2&-1\\-3&-3&-2\end{pmatrix}$$

ここで、Cおよび Dについて、固有値を求めます。

Dについては、固有値λ = 4,3,1

固有ベクトルは、固有値λ =4 について、$(0\quad 1\quad 0)^T$

固有値λ =3 について、$(1\quad 0\quad 0)^T$

固有値λ =1 について、$(0\quad 0\quad 1)^T$

であることは自明

Cについては、

$$\begin{vmatrix}(8-\lambda)&5&7\\-1&(2-\lambda)&-1\\-3&-3&(-2-\lambda)\end{vmatrix}=0$$

を解いて

$$\lambda^3-8\lambda^2+19\lambda-12=0$$

$(\lambda-4)(\lambda-3)(\lambda-1)$=0

$$\lambda=4,3,1$$

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}8&5&7\\-1&2&-1\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

を解いて

$\lambda = 4$について、

$$8x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 4x_1$$
$$-1x_1 + 2x_2 - x_3 = 4x_2$$
$$-3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4x_3$$

の連立方程式を得る。

$4x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0$ ①

$-x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ ②

$-3x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0$ ③

① ＋4 x②

$$-3x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_2 = x_3$$
$$-3x_1 - 9x_2 = 0$$

$x_1 = -3x_2$

固有ベクトルは

$t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$について、

$$8x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 3x_1$$
$$-1x_1 + 2x_2 - x_3 = 3x_2$$
$$-3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3x_3$$

の連立方程式を得る。

$$5x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$-3x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$x_1 = -x_2$$

固有ベクトルは

$t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$について、

$$8x_1 + 5x_2 + 7x_3 = x_1$$
$$-1x_1 + 2x_2 - x_3 = x_2$$
$$-3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = x_3$$

という連立方程式を得る。

$$7x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0$$

$$-x_1+x_2-x_3=0$$
$$-3x_1-3x_2-3x_3=0$$
$$x_2=0$$
$$x_1=-x_3$$
固有ベクトルは
$$t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$
以上で、それぞれの固有ベクトルが求まりました。さてここで、D の固有ベクトルをそれぞれ
$$\boldsymbol{P_1}=(1\quad 0\quad 0)$$
$$\boldsymbol{P_2}=(0\quad 1\quad 0)$$
$$\boldsymbol{P_3}=(0\quad 0\quad 1)$$
C の固有ベクトルをそれぞれ
$$\boldsymbol{P_1}^T=(1\quad -1\quad 0)$$
$$\boldsymbol{P_2}^T=(3\quad -1\quad -1)$$
$$\boldsymbol{P_3}^T=(-1\quad 0\quad 1)$$
($\boldsymbol{P_3}^T$については$t=-1$とし、他は$t=1$としました。数学的な理由はありません。後段の説明の流れを解りやすくするためです。)
としてそれぞれの固有ベクトル間の内積を考えると
$$\boldsymbol{P_1P_2}=\boldsymbol{P_2P_3}=\boldsymbol{P_3P_1}=0$$
であり、それぞれの固有ベクトルは互いに直交しています。しかし
$$\boldsymbol{P_1}^T\boldsymbol{P_2}^T\neq 0,\boldsymbol{P_2}^T\boldsymbol{P_3}^T\neq 0,\boldsymbol{P_3}^T\boldsymbol{P_1}^T\neq 0$$
であり、D の固有ベクトルは互いに直交していません。
固有ベクトルがつくる角度は、相似な行列間で等しくないということがわかります。

次に、固有値（固有ベクトル方向のベクトルの長さがどのくらいに拡大されるか、固有ベクトル上の２点の距離がどのくらい拡大されるか）について計算してみます。
上記の例に挙げた、
$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
について
$$\boldsymbol{D}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$
という変換を考えます。
この変換の固有値$\lambda=3,\lambda=4,\lambda=1$であり、それぞれの固有値に対応する固有ベクトル

$$が、\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

だということは、$x_1 - x_2 - x_3$の座標軸で表される空間上の 2 点 A:$\begin{pmatrix} x_{1A} \\ x_{2A} \\ x_{3A} \end{pmatrix}$、B:$\begin{pmatrix} x_{1B} \\ x_{2B} \\ x_{3B} \end{pmatrix}$間のベクトル$\overrightarrow{AB}$が固有ベクトルの条件を満たせば（簡単に言えば、ベクトルの方向軸が一致すれば）、返還後に移された 2 点 ***A'***:$\begin{pmatrix} x_{1A'} \\ x_{2A'} \\ x_{3A'} \end{pmatrix}$、***B'***:$\begin{pmatrix} x_{1B'} \\ x_{2B'} \\ x_{3B'} \end{pmatrix}$のベクトルの長さ（２点間の距離）

$\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$は、$\left|\overrightarrow{AB}\right|$はλ倍となる。式で書くと以下の通り

$$\frac{\left|\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \lambda$$

$A: (1 \quad 0 \quad 0), B: (2 \quad 0 \quad 0)$を考える。

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 1$$

ベクトル$\overrightarrow{AB} = (2-1 \quad 0-0 \quad 0-0) = (1 \quad 0 \quad 0)$

であり、このベクトルは固有ベクトル$(t \quad 0 \quad 0)$である。

$$\overrightarrow{A'B'} = \mathrm{D}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{A'B'}\right| = 3$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = 3$$

これを一般化すれば

$A: (a \quad 0 \quad 0), B: (b \quad 0 \quad 0)$ (b>a)について。

$$\overrightarrow{AB} = (b-a \quad 0 \quad 0)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \mathrm{b} - \mathrm{a}$$

$$\overrightarrow{A'B'} = \mathbf{D}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3(b-a) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{A'B'}\right| = 3(\mathrm{b} - \mathrm{a})$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = 3$$

固有値$\lambda=4,\lambda=1$と、それぞれの固有値に対応する固有ベクトル、$\begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\t\end{pmatrix}$についても、同様にベクトルの絶対値の変化率が固有値となることはわざわざ取り上げて計算するまでもないでしょう。

次に、

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}8&5&7\\-1&2&-1\\-3&-3&-2\end{pmatrix}$$

について

$$\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5&7\\-1&2&-1\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

という変換を考えます。

この変換の固有値$\lambda=3,\lambda=4,\lambda=1$であり、それぞれの固有値に対応する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix}t\\-t\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3t\\-t\\-t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}t\\0\\-t\end{pmatrix}$

まず、空間上で、$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}t\\-t\\0\end{pmatrix}$となる。二点 A,B を考えます。

たとえば、点 A:$(1\quad -1\quad 0)$と点 A:$(2\quad -2\quad 0)$は

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

なので、$\overrightarrow{AB}$は固有ベクトルです。

一般的には、点 A:$(a\quad -a\quad 0)$と点 A:$(b\quad -b\quad 0), b>a$について

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}b-a\\a-b\\0\end{pmatrix}$$

となり、固有ベクトルです。

$$\overline{|AB|}=\sqrt{(b-a)^2+(a-b)^2+0^2}=\sqrt{2}(b-a)$$

変換後の点 A”,B”を考えると

$$\overrightarrow{A''B''}=\mathrm{C}\begin{pmatrix}b-a\\a-b\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5&7\\-1&2&-1\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b-a\\a-b\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8(b-a)+5(a-b)\\-(b-a)+2(a-b)\\-3(b-a)-3(a-b)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3(b-a)\\-3(b-a)\\0\end{pmatrix}$$

$$\left|\overline{A''B''}\right|=\sqrt{\{3(b-a)\}^2+\{-3(b-a)\}^2}=3\sqrt{2}(b-a)$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{A''B''}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=3$$

固有値$\lambda=4,\lambda=1$と、それぞれの固有値に対応する固有ベクトル、$\begin{pmatrix}3t\\-t\\-t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}t\\0\\-t\end{pmatrix}$についても、同様に計算できます。固有値　$\lambda=4$、固有ベクトル$\begin{pmatrix}3t\\-t\\-t\end{pmatrix}$については、若干計算が複雑になるので、念のために計算例を示します。

点 A、B 間のベクトルは

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3(b-a)\\a-b\\a-b\end{pmatrix}$$

$$\overline{|AB|}=\sqrt{\{3(b-a)\}^2+(a-b)^2+(a-b)^2}=\sqrt{11}(b-a)$$

$$\overrightarrow{A''B''}=\mathrm{C}\begin{pmatrix}3(b-a)\\a-b\\a-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5&7\\-1&2&-1\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3(b-a)\\a-b\\a-b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8\times\{3(b-a)\}+5\times(a-b)+7\times(a-b)\\-1\times\{3(b-a)\}+2\times(a-b)-1\times(a-b)\\-3\times\{3(b-a)\}-3\times(a-b)-2\times(a-b)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}12(b-a)\\4(a-b)\\4(a-b)\end{pmatrix}$$

$$\overline{|A''B''|}=\sqrt{\{12(b-a)\}^2+\{4(a-b)\}^2+\{4(a-b)\}^2}$$

$$=4\sqrt{\{3(b-a)\}^2+(a-b)^2+(a-b)^2}=4\sqrt{11}(b-a)$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{A''B''}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=4$$

わかったのは、相似の行列の間では固有値が同じだということです。だったら、そのように定義すればよいのではないかとも考えられますが、当面、ここで議論している範囲ではそれでも良いのですが、行列の概念をもっと拡張した場合まで考えると、それでよいかどうか自信がありません。多分、まずいのではないかと思いますが、ここではそれを論ずる余裕がないので、先を急いで、この説明はここにとどめます。専門家に訊ねてください。