V-2-4. 二次形式

V-2-4-1. 対称行列と二次形式

つぎのような式を二次形式と呼びます。二次式だけで出来ているからです。

$$ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+dx_1x_2+ex_2x_3+fx_3x_1$$

そう考えると、次の形の式は一次形式ということになります。

$$\mathrm{a}x_1+bx_2+cx_3$$

１次形式を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例としたあげた２次形式（$ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+dx_1x_2+ex_2x_3+fx_3x_1$）を行列で表すと次のようになります。

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

確かめてみます。

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 & dx_1+bx_2+ & fx_1+ex_2+cx_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax_1 & dx_1+bx_2+ & fx_1+ex_2+cx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+dx_1x_2+ex_2x_3+fx_3x_1$$

確かに、２次形式を表すことができます。ですから、このように書いても間違いではありませんし、そちらの方が普通でしょう。

しかし、ここでは、次のように表したいのです。

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{f}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{f}{2} & \frac{e}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

実際にそうなっていることを確かめます。

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{f}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{f}{2} & \frac{e}{2} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1+\frac{d}{2}x_2+\frac{f}{2}x_3 & \frac{d}{2}x_1+bx_2+\frac{e}{2}x_3 & \frac{f}{2}x_1+\frac{e}{2}x_2+cx_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax_1+\frac{d}{2}x_2+\frac{f}{2}x_3 & \frac{d}{2}x_1+bx_2+\frac{e}{2}x_3 & \frac{f}{2}x_1+\frac{e}{2}x_2+cx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{a}{x_1}^2+\frac{d}{2}x_1x_2+\frac{f}{2}x_1x_3+\frac{d}{2}x_1x_2+b{x_2}^2+\frac{e}{2}x_1x_3+\frac{f}{2}x_1x_3+\frac{e}{2}x_2x_3+c{x_3}^2$$

$$=a{x_1}^2+b{x_2}^2+c{x_3}^2+dx_1x_2+ex_2x_3+fx_3x_1$$

つまり、わざわざ対称行列にしているのです。そこが重要なところです。

一般的にp次の対称行列は次のように書けます。

$$(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_p)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

ベクトル$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$を$\boldsymbol{x}$、$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}$を$\boldsymbol{A}$とあらわすと、この式はもっと簡便化して次にように書くことができます。

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

V-2-4-2. 二次形式の対角化

二次式を考えればわかるように、二次形式の軌跡は楕円、双曲線、放物線のような空間的な形を持っています。しかし、これを多次元空間で示すことは困難なので、二次の対称行列について考えます。

対称行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$について考えます。

固有方程式

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda-1)^2-4=$$

$$\lambda=3,-1$$

固有ベクトルを求めます。

$$x_1+2x_2=3x_1$$

$$2x_1+x_2=3x_2$$

$$x_1=x_2$$

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$x_1+2x_2=-x_1$$

$$2x_1+x_2=-x_2$$

$$x_1 = -x_2$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

対角化行列

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} & \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} & \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + 1 - 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - 1 + 1 - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 1 - 1 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

スペクトル分解

$$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 {\boldsymbol{e}_1}^T = 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \boldsymbol{e}_2 {\boldsymbol{e}_2}^T = -1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 {\boldsymbol{e}_1}^T + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 {\boldsymbol{e}_2}^T = 3\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \pm 1\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$= 3\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

このスペクトル分解の結果から、反対に二次式を作ります。

$$\boldsymbol{x}^T\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}_1 {\boldsymbol{e}_1}^T \boldsymbol{x} + \lambda_2 \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}_2 {\boldsymbol{e}_2}^T \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}_1 {\boldsymbol{e}_1}^T \boldsymbol{x} = 3\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2} & \frac{x_1+x_2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$= 3\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2} & \frac{x_1+x_2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \frac{3}{2}({x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_1}^2) = 3\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\lambda_2 \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}_2 {\boldsymbol{e}_2}^T \boldsymbol{x} = -\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\frac{x_1-x_2}{2} & \frac{-x_1+x_2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}({x_1}^2 - 2x_1x_2 + {x_1}^2) = -\left(\frac{x_2-x_1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\therefore \quad \lambda_1 \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}_1 {\boldsymbol{e}_1}^T \boldsymbol{x} + \lambda_2 \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}_2 {\boldsymbol{e}_2}^T \boldsymbol{x} = 3\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x_2-x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 \qquad \mathrm{i}$$

一方、もとの行列からそのまま計算すると、

$$\boldsymbol{x}^T\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+2x_2 & 2x_1+x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = {x_1}^2 + 4x_1x_2 + {x_2}^2 \quad \mathrm{ii}$$

となりますが、確かに以下の計算変形が正しいということは、下の等式の右辺を計算してみればわかります。

$${x_1}^2 + 4x_1x_2 + {x_2}^2 = 3\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x_2-x_1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

もう少しわかりやすくするために、以下の変換を行います。

$$x_1 + x_2 = X_1$$

$$x_2 - x_1 = X_2$$

$$x_1{}^2 + 4x_1x_2 + x_2{}^2 = \frac{X_1{}^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} - \frac{X_2{}^2}{\sqrt{2}^2}$$

図 56 の赤い細い矢印は固有ベクトルです。固有ベクトルは直交しています。また、X_1、X_2 も固有ベクトルと並行しているので、固有ベクトルです。

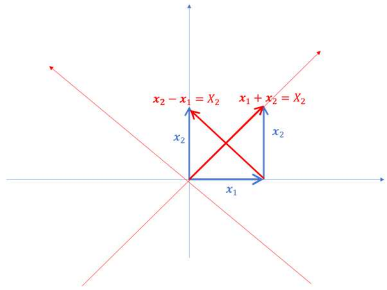

図 56 行列の固有ベクトルと、変換してできるベクトル

二次形式だけでは図形的な意味を持ちませんが、二次形式がある実数値をとるときには、その軌跡は特定の形を持ちます。その形は円錐曲線とよばれているもので、円錐を平面で切った時の断面の形状で、断面の向きによって形状が異なります。円錐曲線は準線と焦点からの距離の比が一定になる点の軌跡ですが、この比によって、円、楕円、放物線、双曲線に分けられます。双曲線は円錐曲線の一つですが、より実用的な的な定義は、２つの焦点からの距離の差が一定の点の集合です。

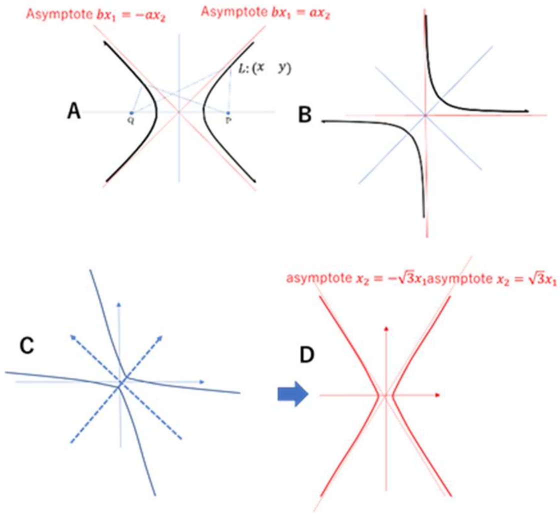

図 57. 様々な双曲線

上述の定義に従って、双曲線を作ります。焦点を P,Q とします。

$$\mathrm{P}:\ (f \quad 0)$$

$$\mathrm{Q}:\ (f \quad 0)$$

$$|LQ| - |LP| = |2a| = \pm 2a$$

$$|LQ| = \pm 2a + |LP|$$

$$|LQ|^2 = 4a^2 \pm 4a|LP| + |LP|^2$$

$$|LP| = \sqrt{(x-f)^2 + (y-0)^2}$$
$$|LQ| = \sqrt{(x+f)^2 + (y-0)^2}$$
$$(x+f)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-f)^2 + y^2} + (x-f)^2 + y^2$$
$$4fx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$
$$fx - a^2 = a\sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$
$$(fx - a^2)^2 = a^2(x-f)^2 + a^2y^2$$
$$f^2x^2 - 2c^2fx + a^2 = a^2x^2 - 2a^2fx + a^2f^2 + a^2y^2$$
$$(f^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2f^2 - a^4$$
$$(f^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(f^2 - a^2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(f^2 - a^2)} = 1$$

$(f^2 - a^2) = b^2$とします。。

$$f^2 = a^2 + b^2$$
$$f = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

これが、双曲線の一般式です。この式をさらに変形します。

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2}$$

$$1 - \frac{a^2}{x^2} = \frac{a^2y^2}{b^2x^2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty}\frac{a^2y^2}{b^2x^2} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty}\frac{ay}{bx} = \pm 1$$

この変形の意味は、xの増加に従ってxとyの比が一定の値に近づくということです。したがって、双曲線は$ay = bx$ あるいは $ay = -bx$ という直線に近づいていきます。この直線を漸近線といいます(グラフ A と B）。

図 57 のグラフ A は$x^2 - y^2 = 1$のグラフです。これを反時計方向に $\frac{\pi}{4}$回転すると B のグラフが得られます。回転の式は以下の式です。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y)$$

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}((X + Y)^2 - (-X + Y)^2) = 2XY$$

$$2XY = 1$$

$$Y = \frac{1}{2X}$$

この式は反比例の式です。反比例の式も双曲線の式で、X 軸と Y 軸が漸近線になっています。上述の方法で双曲線の式を作るときは、X 線上に 2 つの焦点を置きました。しかし、一般的には焦点は X 線上にありません。これを回転して、X 線上に焦点を置くごとが直交化だと言えます。図 57 のグラフ C は以下の式の軌跡です。

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1$$

ここから、直接、軌跡を描くことを考えます。

$${x_1}^2 + 4x_1x_2 + {x_2}^2 = 1$$

$${x_1}^2 + 4x_1x_2 + {x_2}^2 = 1$$

$$(x_2 + 2x_1)^2 - 3{x_1}^2 = 1$$

$$(x_2 + 2x_1)^2 = 1 + 3{x_1}^2$$

$$x_2 + 2x_1 = \pm\sqrt{1 + 3{x_1}^2}$$

$$x_2 = -2x_1 \pm \sqrt{1 + 3{x_1}^2}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = -2 \pm \sqrt{\frac{1}{x^2} + 3}$$

$$\lim_{x_1 \to \pm\infty} \left(-2 \pm \sqrt{\frac{1}{x^2} + 3} \right) = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$\lim_{x_1 \to \pm\infty} \frac{x_2}{x_1} = -2 \pm \sqrt{3}$$

したがって、漸近線は $x_2=-\left(2+\sqrt{3}\right)x_1$ と $x_2=-\left(2-\sqrt{3}\right)x_1$ です。
これを時計方向に$\frac{\pi}{4}$回転します。

$$\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-\left(2+\sqrt{3}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{3+\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}}=\frac{-\left(3+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{-\left(3-3-2\sqrt{3}\right)}{3-1}=\sqrt{3}$$

$$\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-\left(2-\sqrt{3}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{3-\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}=\frac{-\left(3-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{-\left(3-3+2\sqrt{3}\right)}{3-1}=-\sqrt{3}$$

これから、この奇跡が円錐曲線になることは想像できますが、どんな形か想像するのは難しいかもしれません。次のように直交化すると、双曲線であることがわかります。

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}X_1 & X_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=1$$

固有値に正の固有値と負の固有値がある場合、双曲線になります。

次に$\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$について考えます。

対角化します。

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)^2-1=0$$

$$\lambda-2=\pm1$$

$$\lambda=3,1$$

$$2x_1+x_2=3x_1$$

$$x_1+2x_2=3x_2$$

$$x_1=x_2$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$2x_1 + x_2 = x_1$$

$$x_1 + 2x_2 = x_2$$

$$x_1 = -x_2$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

したがって、対角化行列は

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

となります。

$$\boldsymbol{P^{-1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{P}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3+3}{2} & \frac{3-3}{2} \\ \frac{1-1}{2} & \frac{1+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

スペクトル分解します。

$$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 {\boldsymbol{e}_1}^T = 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \boldsymbol{e}_2 {\boldsymbol{e}_2}^T = 1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 {\boldsymbol{e}_1}^T + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 {\boldsymbol{e}_2}^T = 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

この結果を使って、二次形式を作ります。

$$\boldsymbol{x}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}_1 {\boldsymbol{e}_1}^T \boldsymbol{x} + \lambda_2 \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}_2 {\boldsymbol{e}_2}^T \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}_1 {\boldsymbol{e}_1}^T \boldsymbol{x} = 3 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{x_1 + x_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{x_1 + x_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} ({x_1}^2 + 2x_1 x_2 + {x_1}^2) = 3 \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$\lambda_2 \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}_2 {\boldsymbol{e}_2}^T \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - x_2}{2} & \frac{-x_1 + x_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} ({x_1}^2 - 2x_1 x_2 + {x_1}^2) = \left(\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$\therefore \quad \lambda_1 \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}_1 {\boldsymbol{e}_1}^T \boldsymbol{x} + \lambda_2 \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}_2 {\boldsymbol{e}_2}^T \boldsymbol{x} = 3 \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}} \right)^2 \qquad \mathrm{i}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2{x_1}^2 + 2x_1 x_2 + 2{x_2}^2$$

$$= 3 \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$x_1 + x_2 = X_1,\ x_2 - x_1 = X_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{{X_1}^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^2} + \frac{{X_2}^2}{\sqrt{2}^2} = 1$$

これは楕円の式です。楕円の式の一般的な形は次の通りです。

$$\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{x_2}^2}{b^2}=1$$

楕円は２つの焦点からの距離の和が一定の点の軌跡です。この定義に従って楕円の式を作ります。

$$\mathrm{P}:\ (f \quad 0)$$

$$\mathrm{Q}:\ (f \quad 0)$$

$$|LQ|+|LP|=2a$$

$$|LQ|^2+2|LQ||LP|+|LP|^2=4a^2$$

$$|LP|=\sqrt{(x-f)^2+(y-0)^2}$$

$$|LQ|=\sqrt{(x+f)^2+(y-0)^2}$$

$$(x+f)^2+y^2+2\sqrt{(x-f)^2+y^2}\sqrt{(x+f)^2+y^2}+(x-f)^2+y^2=4a^2$$

$$2x^2+2f^2+2y^2+2\sqrt{(x^2-f^2)^2+2x^2y^2+2f^2y^2+y^4}=4a^2$$

$$\sqrt{(x^2-f^2)^2+2x^2y^2+2f^2y^2+y^4}=2a^2-f^2-x^2-y^2$$

$$x^4-2x^2f^2+f^4+2x^2y^2+2f^2y^2+y^4$$
$$=4a^4-4a^2f^2-4a^2x^2-4a^2y^2+f^4+2f^2x^2+2f^2y^2+x^4+2x^2y^2+y^4$$

$$-2x^2f^2=4a^4-4a^2f^2-4a^2x^2-4a^2y^2+2f^2x^2$$

$$4a^2x^2+4a^2y^2-4f^2x^2=4a^4-4a^2f^2$$

$$(a^2-f^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-f^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(f^2-a^2)}=1$$

$(f^2-a^2)=b^2$とします。

$$f^2=a^2+b^2$$

$$f=\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

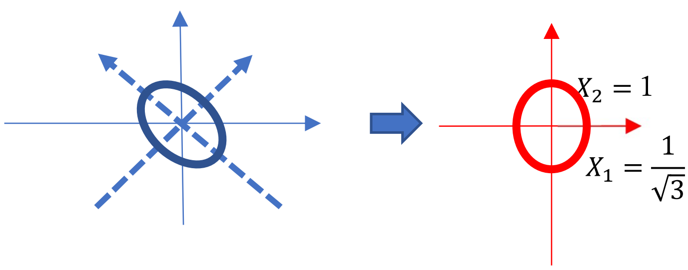

図 58.　正定値行列の直交化

この二次形式の形は楕円です。すべての固有値が正の場合、その行列を正定値だと表現します。この場合２次元なので楕円です。多次元の場合、すべての固有値が正の時、正定値

と言います。正定値のもう一つ別の定義は、２次形式に表した式が、常に正であることです。第一の定義では、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3 > 0, \qquad \lambda_2 = 1 > 0$$

だから正定値です。第二の定義では、

$$(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 + x_2 \quad x_1 + 2x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2{x_1}^2 + 2x_1x_2 + 2{x_2}^2 == 3\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 > 0$$

だから正定値です。第一の定義と第二の定義は実は同じことです。

この場合、２次元ですから、第二の定義でも正定値であることがわかりますが、多次元になると、第二の定義で正定値

であることを証明するのは難しいでしょう。多次元の場合、正定置であれば、その次元の空間の中で、楕円球のラグビーボールのように空間的に閉じた形になります。二次形式の対角化とは、空間中に斜めに角度を持っておかれたラグビーボールを回転して、空間軸とラグビーボールの軸を一致させることだとも言えるでしょう。

V-2-4-3.　スペクトル分解と二次形式

二次形式のスペクトル分解は、二次形式の対角化の応用です。$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{e}_1{\boldsymbol{e}_1}^T\boldsymbol{x} + \lambda_2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{e}_2{\boldsymbol{e}_2}^T\boldsymbol{x} + \cdots \lambda_p\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{e}_p{\boldsymbol{e}_p}^T\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{e}_i$ という行列計算は線形です。$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{e}_i{\boldsymbol{e}_i}^T\boldsymbol{x}$ は線形同士をかけあわせた二次形式です。これは、次の式の変形からもわかります。

$$(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

また、$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{e}_i{\boldsymbol{e}_i}^T\boldsymbol{x}$は固有ベクトルの平方です。このことから、スペクトル分解とは、二次形式を固有ベクトルの平方の和として表すことだともいえるでしょう。