V-2-5. 行列のべき乗

（べき乗のべきって、冪と書くのですが、書けませんよね。）

$\mathbf{A}^{m}$について考えます。普通は$\mathbf{A}^{\boldsymbol{n}}$と書くのですが、n はデーターの個数の意味で使ってしまったので、m にします。個々のデータの項目数は$\boldsymbol{p}$です。
以下の式を成り立たせる$\boldsymbol{P}$が存在し、$\boldsymbol{A}$が対角化可能であるとします。

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p\end{pmatrix}$$

ここでは$\boldsymbol{\Lambda}$について書きます。対角行列のことです。対角行列では以下が一般に成り立ちます。

$$\boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{m}}=\begin{pmatrix}{\lambda_1}^m & 0 & 0 & 0\\ 0 & {\lambda_2}^m & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & {\lambda_p}^m\end{pmatrix}$$

これは感覚的にわかるでしょうか。念のために、丁寧にやります。

$$\boldsymbol{\Lambda}^2=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p\end{pmatrix}$$

これを実際に計算してみると、

$$\boldsymbol{\Lambda}^2=\begin{pmatrix}{\lambda_1}^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & {\lambda_p}^2\end{pmatrix}$$

続いて

$$\boldsymbol{\Lambda}^3=\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}{\lambda_1}^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & {\lambda_p}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}{\lambda_1}^3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & {\lambda_2}^3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & {\lambda_p}^3\end{pmatrix}$$

となって、これを繰り返すだけです。
ここで

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$$

にもどって、両辺を m 乗します。

$$(\boldsymbol{P^{-1}AP})^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{\Lambda^m}$$

左辺を展開すると

$$左辺 = \boldsymbol{P^{-1}APP^{-1}AP} \cdots \boldsymbol{P^{-1}APP^{-1}AP}$$

$$\boldsymbol{PP^{-1}} = \boldsymbol{I}$$

だから、間にはさまっている$\boldsymbol{PP^{-1}}$は数字の 1 と同じ機能しかしないから、

$$左辺 = \boldsymbol{P^{-1}A^mP}$$

となります。

右辺については

$$右辺 = \boldsymbol{\Lambda^m} = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {\lambda_p}^m \end{pmatrix}$$

ですから　左辺=右辺で

$$\boldsymbol{P^{-1}A^mP} = \boldsymbol{\Lambda^m}$$

となります。知りたいのは$\boldsymbol{A^m}$ですから、両辺の左から$\boldsymbol{P}$、右から$\boldsymbol{P^{-1}}$を掛けて

$$\boldsymbol{A^m} = \boldsymbol{P\Lambda^mP^{-1}}$$

式 62

というのが、行列のべき乗の公式ということになります。さらに、スペクトル分解や疑似スペクトル分解を使うと、以下のようになります。

対称行列

$$\boldsymbol{A^m} = {\lambda_1}^m \boldsymbol{P_1}\boldsymbol{P_1}^{\boldsymbol{T}} + {\lambda_2}^m \boldsymbol{P_2}\boldsymbol{P_2}^{\boldsymbol{T}} + \cdots {\lambda_p}^m \boldsymbol{P_p}\boldsymbol{P_p}^T$$

$$\boldsymbol{P_i}: 固有ベクトル$$

$$\because\ \boldsymbol{P^{-1}} = \boldsymbol{P}^T$$

非対称行列

$$\boldsymbol{A^m} = {\lambda_1}^m \boldsymbol{P_1}\boldsymbol{P^{-1}} + {\lambda_2}^m \boldsymbol{P_2}\boldsymbol{P^{-1}} + \cdots {\lambda_p}^m \boldsymbol{P_p}\boldsymbol{P^{-1}}$$

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & \cdots & 0 \\ 0 & p_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & p_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots,\quad \boldsymbol{P_p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & p_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

理解を深めるために、具体的に計算してみましょう。

計算が面倒なので、今までに使った

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

という行列を例にします。まず、普通に計算します。

$$\boldsymbol{A^2} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 64-5-21 & 40+10-21 & 56-5-14 \\ -8-2+3 & -5+4+3 & -7-2+2 \\ -24+3+6 & -15-6+6 & -21+3+4 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 38 & 29 & 37 \\ -7 & 2 & -7 \\ -15 & -15 & -14 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{A^3}=\begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 38 & 29 & 37 \\ -7 & 2 & -7 \\ -15 & -15 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 38\times 8-29-37\times 3 & 38\times 5+29\times 2-37\times 3 & 38\times 7-29\times 1-37\times 2 \\ -7\times 8-2\times 1+7\times 3 & -15\times 5+2\times 2+7\times 3 & -15\times 7-2\times 1+7\times 2 \\ -15\times 8+15\times 1+14\times 3 & -15\times 5-15\times 2+14\times 3 & -15\times 7+15\times 1+14\times 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 164 & 137 & 163 \\ -37 & -10 & -37 \\ -63 & -63 & -62 \end{pmatrix}$$

次に疑似スペクトル分解を使って計算します。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

対角化行列

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{P^{-1}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

対角化

$$\boldsymbol{P^{-1}AP}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P_1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P_2}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P_3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P_1}+\boldsymbol{P_2}+\boldsymbol{P_3}$$

$$\boldsymbol{P_1P^{-1}}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{P_2P^{-1}}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{P_3P^{-1}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}} = \mathbf{3}^{\mathbf{2}}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 4^2\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + 1^2\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9+48-1 & -18+48-1 & -9+48-2 \\ 9-16+0 & 18-16+0 & 9-16+0 \\ 0-16+1 & 0-16+1 & 0-16+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 29 & 37 \\ -7 & 2 & -7 \\ -15 & -15 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathbf{3}} = \mathbf{3}^{\mathbf{3}}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 4^3\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + 1^3\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -27+192-1 & -54+192-1 & -27+192-2 \\ 27-64+0 & 54-64+0 & 27-64+0 \\ 0-64+1 & 0-64+1 & 0-64+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 164 & 137 & 163 \\ -37 & -10 & -37 \\ -63 & -63 & -62 \end{pmatrix}$$

ｍが大きくなるとこの方法を使わないと計算が大変です。