VI-1-2. 偏相関分析

VI-1-2-1. 偏相関分析とは何か

多重共線性は重回帰分析の結果の解釈を複雑化します。多重共線性には二つのタイプがあります。一つは同じような説明変数が重なり合っている場合です。もう一つが偽相関です。相対化せずに身長と座高を説明変数に加えると、似たような変数が説明変数に選ばれたことになります。これは第一のタイプです。座高は身長の一部だからです。これに対して、身長と体重が足の速さに相関を持つのは、どちらも体の大きさに関係しているからで、体の大きさに引っ張られて、相関が生まれているのです。事実、私たちの経験では、太った人で足の速い人は少ないと思います。これは偽相関です。特に、小さな子供から大人まで入れて分析すると、こういうことが起きます。もし、身長が同じ人の集団から抽出して、走力の実験を行えば、体重と足の速さは逆相関するでしょう。多重共線性は、変数が重なっている場合にも偽相関の場合にも起こります。そして、偽相関の程度によって、多種共線性に対する対応が違います。もし、変数の重なり合いだけが問題ならば、多重共線性のある変数の中から代表するものを選べばよいだけです。しかし、偽相関の場合、一つの変数を放り出すと新しい発見の機会を失います。そこに重要な逆相関が隠れている可能性があるからです。一般的に言って、自然科学の分野で偽相関を見つけ出すことは難しいことではありません。原因と結果の因果関係が単純で分かりやすく、逆相関も見つけやすいのです。しかし、社会科学や心理学の分野では原因結果の関係が複雑でそのつながりが長いので、簡単に見つからないことがあります。ですから、偽相関を統計的に見つけ出す方法が必要なのです。偏相関分析は偽相関を見つけ出す方法です。

VI-1-2-2. 何故偽相関が出来るのか

実世界は関係性の網の目のようになっています。実際の偽相関はもっと複雑ですが、もっとも単純な偽相関の仕組みは、３変数の関係で、図 65 のように表せます．ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OW}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$が W-O-F 平面上にあります。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$はそれに直交しています。この状態ではベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OW}}$とベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$がなす角度は$\theta$です。ここでベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OW}}$とベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$をベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$に向けて M-W-O 平面、M-F-O 平面内で倒します。その結果ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OW'}}$とベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OF'}}$. が出来ます。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OW'}}$とベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OF'}}$のなす角度は θ'となりますが、θ'がθよりも小さいくなることは明らかでしょう.

$$r_{WF} = \cos\theta$$

$$r_{W'F'} = \cos\theta'$$

$$\theta > \theta'$$

$$\cos\theta < \cos\theta'$$

$$-1 \le r_{WF} < r_{W'F'} \le 1$$

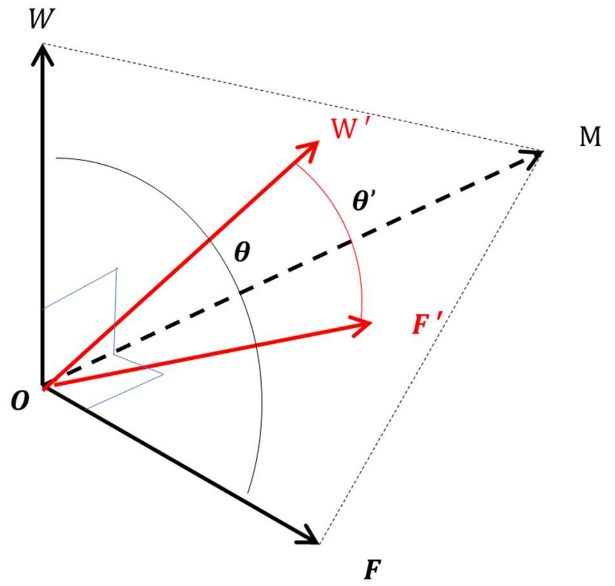

図 66. 偽相関の幾何学的関係

N 次元空間で考えます。それぞれのベクトルは次の通りです。

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}m_1\\ \vdots\\ m_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{M}$と$\boldsymbol{W}$、$\boldsymbol{F}$に相関があると仮定すると$\boldsymbol{W}$、$\boldsymbol{F}$から予測した$\boldsymbol{M}$の値は次の通りです。

$$\widehat{m_i}=a_1w_i+a_2f_i$$

$$m_i=\widehat{m_i}+e_1$$

$\widehat{\boldsymbol{M}}$は以下のように$\boldsymbol{W}$と$\boldsymbol{F}$の線形結合で表せます。

$$\widehat{\boldsymbol{M}}=a_1\boldsymbol{W}+a_2\,\boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{M}=\widehat{\boldsymbol{M}}+\boldsymbol{E}=a_1\boldsymbol{W}+a_2\,\boldsymbol{F}+\boldsymbol{E}$$

次のように具多的な例を当てはめてみます

$\boldsymbol{M}$: 身長のような体の大きさに関するデータ（平均値からの差として表現）

$\boldsymbol{W}$: 体重. （平均値からの差として表現）

$\boldsymbol{F}$: 足の速さ（平均値からの差として表現）

もしデータを戦闘が同じ人から得ていれば、$\boldsymbol{M}$ でデータは W-O-F 平面上に存在します。したがって、$\boldsymbol{W}$と $\boldsymbol{F}$の相関係数は$r_{WF}=\cos\theta$です。しかし、身長をコントロールしていない集団からデータを採ると、様々な身長の人が居るので、$\boldsymbol{M}\neq 0$。 $\boldsymbol{W}$と$\boldsymbol{F}$のベクトルの矢印の頭は$\mathbf{W}'$と $\mathbf{F}'$に移動します。$\widehat{\boldsymbol{M}}$ は$\mathbf{W}'$と $\mathbf{F}$, の線形結合で $\widehat{\boldsymbol{M}}$ は W'-O-F' plane 平面上に存在します。.

図 66 に示したように$\theta>\ \theta'$だから

$$\cos\theta<\cos\theta'$$

$$-1 \le r_{WF} < r_{W'F'} \le 1$$

これが、偽相関ができる仕組みです。

VI-1-2-3. *偏相関分析のやり方*

初めに３変数だけ考えます。

$$\boldsymbol{x} = (x_{1,\cdots}x_n)$$

$$\boldsymbol{y} = (y_{1,\cdots}y_n)$$

$$\boldsymbol{z} = (z_{1,\cdots}z_n)$$

$$x_i = d_{xi} - \overline{d_x}$$

$$y_i = d_{yi} - \overline{d_y}$$

$$z_i = d_{zi} - \overline{d_z}$$

d_{xi}: 変数xのi番目のデータ、$\overline{d_x}$: 変数xの平均 $\overline{d_x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_{xi}$

d_{yi}: 変数 y のi番目のデータ、$\overline{d_y}$: 変数 y の平均 $\overline{d_y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_{yi}$

d_{zi}: 変数zのi番目のデータ、$\overline{d_z}$: 変数 z の平均. $\overline{d_z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_{zi}$

分散・共分散行列を作ります。

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} {x_i}^2 & \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} x_i\, y_i & \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} x_i\, z_i \\ \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} y_i x_i & \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} {y_i}^2 & \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} y_i z_i \\ \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} z_i x_i & \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} z_i y_i & \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} {y_i}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SS_{xx} & SS_{xy} & SS_{xz} \\ SS_{yx} & SS_{yy} & SS_{yz} \\ SS_{zx} & SS_{zy} & SS_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{SS_{xx}}{\sqrt{SS_{xx}}\sqrt{SS_{xx}}} & \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}}\sqrt{SS_{yy}}} & \frac{SS_{xz}}{\sqrt{SS_{xx}}\sqrt{SS_{zz}}} \\ \frac{SS_{yx}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{xx}}} & \frac{SS_{yy}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{yy}}} & \frac{SS_{yz}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{zz}}} \\ \frac{SS_{zx}}{\sqrt{SS_{zz}}\sqrt{SS_{xx}}} & \frac{SS_{zy}}{\sqrt{SS_{zz}}\sqrt{SS_{yy}}} & \frac{SS_{zz}}{\sqrt{SS_{zz}}\sqrt{SS_{zz}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & 1 & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{R}| = 1 + 2\frac{SS_{xy}SS_{yz}SS_{zx}}{SS_{xx}SS_{yy}SS_{zz}} - \frac{SS_{yy}{SS_{zx}}^2 + SS_{zz}{SS_{xy}}^2 + SS_{xx}{SS_{yz}}^2}{SS_{xx}SS_{yy}SS_{zz}}$$

$$= \frac{SS_{xx}SS_{yy}SS_{zz} + 2SS_{xy}SS_{yz}SS_{zx} - SS_{yy}{SS_{zx}}^2 - SS_{zz}{SS_{xy}}^2 - SS_{xx}{SS_{yz}}^2}{SS_{xx}SS_{yy}SS_{zz}}$$

$$\boldsymbol{R}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\widetilde{\boldsymbol{R}}=\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\begin{pmatrix} 1-r_{yz}{}^2 & r_{yz}r_{zx}-r_{xy} & r_{xy}r_{yz}-r_{zx} \\ r_{yz}r_{zx}-r_{xy} & 1-r_{zx}{}^2 & r_{xy}r_{zx}-r_{yz} \\ r_{xy}r_{yz}-r_{xz} & r_{xy}r_{zx}-r_{yz} & 1-r_{xy}{}^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r^{xx} & r^{xy} & r^{xz} \\ r^{yx} & r^{yy} & r^{yz} \\ r^{zx} & r^{yz} & r^{zz} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\begin{pmatrix} 1-\dfrac{SS_{yz}{}^2}{SS_{yy}SS_{zz}} & \dfrac{SS_{yz}SS_{zx}-SS_{xy}SS_{zz}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{xx}}SS_{zz}} & \dfrac{SS_{xy}SS_{yz}-SS_{xz}SS_{yy}}{\sqrt{SS_{xx}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{yy}} \\ \dfrac{SS_{yz}SS_{zx}-SS_{xy}SS_{zz}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{xx}}SS_{zz}} & 1-\dfrac{SS_{zx}{}^2}{SS_{zz}SS_{xx}} & \dfrac{SS_{xy}SS_{zx}-SS_{yz}SS_{xx}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{xx}} \\ \dfrac{SS_{xy}SS_{yz}-SS_{xz}SS_{yy}}{\sqrt{SS_{xx}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{yy}} & \dfrac{SS_{xy}SS_{zx}-SS_{yz}SS_{xx}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{xx}} & 1-\dfrac{SS_{xy}{}^2}{SS_{xx}SS_{yy}} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\begin{pmatrix} \dfrac{SS_{yy}SS_{zz}-SS_{yz}{}^2}{SS_{yy}SS_{zz}} & \dfrac{SS_{yz}SS_{zx}-SS_{xy}SS_{zz}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{xx}}SS_{zz}} & \dfrac{SS_{xy}SS_{yz}-SS_{xz}SS_{yy}}{\sqrt{SS_{xx}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{yy}} \\ \dfrac{SS_{yz}SS_{zx}-SS_{xy}SS_{zz}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{xx}}SS_{zz}} & \dfrac{SS_{zz}SS_{xx}-SS_{zx}{}^2}{SS_{zz}SS_{xx}} & \dfrac{SS_{xy}SS_{zx}-SS_{yz}SS_{xx}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{xx}} \\ \dfrac{SS_{xy}SS_{yz}-SS_{xz}SS_{yy}}{\sqrt{SS_{xx}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{yy}} & \dfrac{SS_{xy}SS_{zx}-SS_{yz}SS_{xx}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{xx}} & \dfrac{SS_{xx}SS_{yy}-SS_{xy}{}^2}{SS_{xx}SS_{yy}} \end{pmatrix}$$

単回帰とはある変数を別のある変数で説明することです。単回帰の解は次の式で与えられます。

$$x=\alpha_{x/z}z+e=\frac{SS_{zx}}{SS_{zz}}z+e$$

$$y=\alpha_{y/z}z+e=\frac{SS_{yz}}{SS_{zz}}z+e$$

$$\alpha_{x/z}: x \text{ を } z \text{で回帰した z の回帰係数、} \quad \alpha_{x/z}=\frac{SS_{zx}}{SS_{zz}}$$

$$\alpha_{x/y}: y \text{ を} z \text{で回帰した z の回帰係数、} \alpha_{x/z}=\frac{SS_{zx}}{SS_{zz}}$$

変数が 4 つ以上の場合、 $(x_1 \quad \cdots \quad x_p), p \geq 4$

$$x_1=\alpha_{x_1/x_3}x_3+\cdots+\alpha_{x_1/x_p}x_p+e$$
$$x_2=\alpha_{x_2/x_3}x_3+\cdots+\alpha_{x_2/x_p}x_p+e$$
$$\vdots$$

これらの式では、eはx_1とx_2以外の変数で説明できない残差です。別の考え方をすると、eは他の変数から独立した目的変数の一部です。目的変数は左辺の x, y, x_1, x_2で。この部分は x, y, x_1, と x_2.だけにかかわっています。この独立した部分$\check{x}$のように表すことにします。$p=3$の例ならば、

$$\check{x}=e=x-\alpha_{x/z}z=x-\frac{SS_{zx}}{SS_{zz}}z$$

$$\check{y} = \mathrm{e} = y - \alpha_{y/z} z = y - \frac{SS_{yz}}{SS_{zz}} z$$

$p \geq 4$の例ならば

$$\breve{x_1} = x_1 - \left(\alpha_{x_1/x_3} x_3 + \cdots + \alpha_{x_1/x_p} x_p\right) = x_1 - \left(\frac{SS_{13}}{SS_{33}} x_3 + \cdots + \frac{SS_{13}}{SS_{pp}} x_p\right)$$

$$\breve{x_2} = x_2 - \left(+\alpha_{x_2/x_3} x_3 + \cdots + \alpha_{x_2/x_p} x_p\right) = x_2 - \left(\frac{SS_{23}}{SS_{33}} x_3 + \cdots + \frac{SS_{2p}}{SS_{pp}} x_p\right)$$

です。$p = 3$の例から考えます。

$$\check{x} = x - \alpha_{x/z} z = x - \frac{SS_{zx}}{SS_{zz}} z$$

$$\check{y} = y - \alpha_{y/z} z = y - \frac{SS_{yz}}{SS_{zz}} z$$

$\alpha_{x/z}$: x を zで回帰した z の回帰係数

$\alpha_{x/y}$: y をzで回帰した z の回帰係数、

ここで、xとyの偏回帰係数を$\mathrm{r}_{xy/rest}$と表すことにします。変回帰係数とは、他の変数の影響を取り除いた二つの変数の関係という意味です。ですから、x、yと z の場合には

$$\mathrm{r}_{xy|rest} = \mathrm{r}_{xy|z}$$

と書けます。

これは　$\check{x}$と$\check{y}$の相関です。

$$\mathrm{r}_{xy|z} = r_{\check{x}\check{y}} = \frac{SS_{\check{x}\check{y}}}{\sqrt{SS_{\check{x}\check{x}}}\sqrt{SS_{\check{y}\check{y}.}}}$$

ですから、次のように共分散と分散を求めます。

$$SS_{\check{x}\check{y}} = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \frac{SS_{zx}}{SS_{zz}} z_k\right)\left(y_k - \frac{SS_{yz}}{SS_{zz}} z_k\right)$$

$$SS_{\check{x}\check{x}} = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \frac{SS_{zx}}{SS_{zz}} z_k\right)^2$$

$$SS_{\check{y}\check{y}} = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k - \frac{SS_{zy}}{SS_{zz}} z_k\right)^2$$

実際の計算は次の通りです。

$$SS_{\check{x}\check{y}} = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \frac{SS_{zx}}{SS_{zz}} z_k\right)\left(y_k - \frac{SS_{yz}}{SS_{zz}} z_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{SS_{zx}}{SS_{zz}} y_k z_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{SS_{yz}}{SS_{zz}} x_k z_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{SS_{zx} SS_{yz}}{{SS_{zz}}^2} {z_k}^2$$

$$= SS_{xy} + \frac{SS_{zx} SS_{yz}}{SS_{zz}} - \frac{SS_{zx} SS_{yz}}{SS_{zz}} - \frac{SS_{xz} SS_{yz}}{SS_{zz}}$$

$$= SS_{xy} - \frac{SS_{xz}SS_{yz}}{SS_{zz}}$$

$$SS_{\check{x}\check{x}} = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \frac{SS_{zx}}{SS_{zz}}z_k\right)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n}{x_k}^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{SS_{zx}}{SS_{zz}}z_k x_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{{SS_{zx}}^2}{{SS_{zz}}^2}{z_k}^2$$

$$= SS_{xx} - 2\frac{{SS_{zx}}^2}{SS_{zz}} + \frac{{SS_{zx}}^2}{SS_{zz}}$$

$$= SS_{xx} - \frac{{SS_{zx}}^2}{SS_{zz}}$$

同様に

$$SS_{\check{y}\check{y}} = SS_{yy} - \frac{{SS_{yz}}^2}{SS_{zz}}$$

したがって、偏相関は次の通りです。

$$\mathrm{r}_{xy|z} = r_{\check{x}\check{y}} = \frac{SS_{xy} - \dfrac{SS_{xz}SS_{yz}}{SS_{zz}}}{\sqrt{SS_{xx} - \dfrac{{SS_{zx}}^2}{SS_{zz}}}\sqrt{SS_{yy} - \dfrac{{SS_{yz}}^2}{SS_{zz}}}}$$

$$= \frac{SS_{xy}SS_{zz} - SS_{xz}SS_{yz}}{\sqrt{SS_{xx}SS_{zz} - {SS_{zx}}^2}\sqrt{SS_{yy}SS_{zz} - {SS_{yz}}^2}}$$

これは３変数の場合です。この式は私たちが作った記法を使えばもっと簡単に書けます。まず、相関行列の逆行列を作ります。

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\begin{pmatrix} \dfrac{SS_{yy}SS_{zz} - {SS_{yz}}^2}{SS_{yy}SS_{zz}} & \dfrac{SS_{yz}SS_{zx} - SS_{xy}SS_{zz}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{xx}}SS_{zz}} & \dfrac{SS_{xy}SS_{yz} - SS_{xz}SS_{yy}}{\sqrt{SS_{xx}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{yy}} \\ \dfrac{SS_{yz}SS_{zx} - SS_{xy}SS_{zz}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{xx}}SS_{zz}} & \dfrac{SS_{zz}SS_{xx} - {SS_{zx}}^2}{SS_{zz}SS_{xx}} & \dfrac{SS_{xy}SS_{zx} - SS_{yz}SS_{xx}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{xx}} \\ \dfrac{SS_{xy}SS_{yz} - SS_{xz}SS_{yy}}{\sqrt{SS_{xx}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{yy}} & \dfrac{SS_{xy}SS_{zx} - SS_{yz}SS_{xx}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{xx}} & \dfrac{SS_{xx}SS_{yy} - {SS_{xy}}^2}{SS_{xx}SS_{yy}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r^{xx} & r^{xy} & r^{xz} \\ r^{yx} & r^{yy} & r^{yz} \\ r^{zx} & r^{yz} & r^{zz} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{r}_{xy/z} = \frac{SS_{xy}SS_{zz} - SS_{xz}SS_{yz}}{\sqrt{SS_{xx}SS_{zz} - {SS_{zx}}^2}\sqrt{SS_{yy}SS_{zz} - {SS_{yz}}^2}}$$

$$= \frac{-\left(SS_{yz}SS_{zx} - SS_{xy}SS_{zz}\right)}{\sqrt{SS_{xx}SS_{zz} - {SS_{zx}}^2}\sqrt{SS_{yy}SS_{zz} - {SS_{yz}}^2}}$$

$$= \frac{-\left(SS_{yz}SS_{zx} - SS_{xy}SS_{zz}\right)}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{xx}}SS_{zz}} \cdot \frac{\sqrt{SS_{zz}SS_{xx}}}{\sqrt{SS_{xx}SS_{zz} - {SS_{zx}}^2}} \cdot \frac{\sqrt{SS_{yy}SS_{zz}}}{\sqrt{SS_{yy}SS_{zz} - {SS_{yz}}^2}}$$

$$= \frac{-\left(SS_{yz}SS_{zx} - SS_{xy}SS_{zz}\right)}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{xx}}SS_{zz}} \cdot \sqrt{\frac{SS_{zz}SS_{xx}}{SS_{xx}SS_{zz} - {SS_{zx}}^2}} \cdot \sqrt{\frac{SS_{yy}SS_{zz}}{SS_{yy}SS_{zz} - {SS_{yz}}^2}}$$

$$= -r^{xy} \cdot \sqrt{\frac{1}{r^{yy}}}\sqrt{\frac{1}{r^{xx}}}$$

$$= \frac{-r^{xy}}{\sqrt{r^{xx}}\sqrt{r^{yy}}}$$

式 74

４変数の場合は $p \geq 4$

単純に計算するだけならば、解は次の通りです。

$$\mathrm{r}_{ij/rest} = r_{\breve{x}_i\breve{x}_j} = \frac{SS_{\breve{x}_i\breve{x}_j}}{\sqrt{SS_{\breve{x}_i\breve{x}_i}}\sqrt{SS_{\breve{x}_j\breve{x}_j}}}$$

$$\breve{x}_1 = x_1 - \left(\frac{SS_{13}}{SS_{33}}x_3 + \cdots + \frac{SS_{1p}}{SS_{pp}}x_p\right)$$

$$\breve{x}_2 = x_2 - \left(\frac{SS_{23}}{SS_{33}}x_3 + \cdots + \frac{SS_{2p}}{SS_{pp}}x_p\right)$$

$$SS_{\breve{x}_1\breve{x}_2} = \sum_{k=1}^{n}\left(x_{1k} - \left(\sum_{l=3}^{p}\frac{SS_{1l}}{SS_{ll}}x_{lk}\right)\right)\left(x_{2k} - \left(\sum_{l=3}^{p}\frac{SS_{2l}}{SS_{ll}}x_{lk}\right)\right)$$

$$SS_{\breve{x}_1\breve{x}_1} = \sum_{k=1}^{n}\left(x_{1k} - \left(\sum_{l=3}^{p}\frac{SS_{1l}}{SS_{ll}}x_{lk}\right)\right)^2$$

$$SS_{\breve{x}_2\breve{x}_2} = \sum_{k=1}^{n}\left(x_{2k} - \left(\sum_{l=3}^{p}\frac{SS_{2l}}{SS_{ll}}x_{lk}\right)\right)^2$$

$$\mathrm{r}_{x_1x_2|rest} = r_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2} = \frac{SS_{\tilde{x}_i\tilde{x}_j}}{\sqrt{SS_{\tilde{x}_i\tilde{x}_i}}\sqrt{SS_{\cdot\tilde{x}_j\tilde{x}_j}}}$$

分散共分散行列の１行目と２行目に、符号を変えないで、偏相関分析の解析対象になる因子を持ってくることは可能です。やってみればわかりますが、行と列の両方を入れ替えなければばならないからです。

その結果、次のように偏相関係数を計算することが出来ます。

$$\mathrm{r}_{x_ix_j|rest} == \frac{SS_{\tilde{x}_i\tilde{x}_j}}{\sqrt{SS_{\tilde{x}_i\tilde{x}_i}}\sqrt{SS_{\cdot\tilde{x}_j\tilde{x}_j}}}$$

これは確かに解の表し方の一つですが、計算の過程が複雑です。もう少し簡単な表現を探したくなります。一つのアイデアは、一つずつ、変数の影響を取り除いていくやり方です。たとえば、 x, y, z, w,の４つの変数があるときに、xとyの関係を、zとwの影響を取り除いて表すことを考えます。 まず、相関行列を作ります。

$$\boldsymbol{R}_{xyzw} = \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} & r_{xw} \\ r_{yx} & 1 & r_{yz} & r_{yw} \\ r_{zx} & r_{zy} & 1 & r_{zw} \\ r_{wx} & r_{wy} & r_{wz} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{xyzw}{}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & r_{yz} & r_{yw} \\ r_{zy} & 1 & r_{zw} \\ r_{wy} & r_{wz} & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} r_{yx} & r_{yz} & r_{yw} \\ r_{zx} & 1 & r_{zw} \\ r_{wx} & r_{wz} & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_{yx} & 1 & r_{yw} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zw} \\ r_{wx} & r_{wy} & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} r_{yx} & 1 & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & 1 \\ r_{wx} & r_{wy} & r_{wz} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} r_{xy} & r_{xz} & r_{xw} \\ r_{zy} & 1 & r_{zw} \\ r_{wy} & r_{wz} & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & r_{xz} & r_{xw} \\ r_{zx} & 1 & r_{zw} \\ r_{wx} & r_{wz} & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xw} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zw} \\ r_{wx} & r_{wy} & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{zx} & r_{zy} & 1 \\ r_{wx} & r_{wy} & r_{wz} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} r_{xy} & r_{xz} & r_{xw} \\ 1 & r_{yz} & r_{yw} \\ r_{wy} & r_{wz} & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & r_{xz} & r_{xw} \\ r_{yx} & r_{yz} & r_{yw} \\ r_{wx} & r_{wz} & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xw} \\ r_{yx} & 1 & r_{yw} \\ r_{wx} & r_{wy} & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & 1 & r_{yz} \\ r_{wx} & r_{wy} & r_{wz} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} r_{xy} & r_{xz} & r_{xw} \\ 1 & r_{yz} & r_{yw} \\ r_{zy} & 1 & r_{zw} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & r_{xz} & r_{xw} \\ r_{yx} & r_{yz} & r_{yw} \\ r_{zx} & 1 & r_{zw} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xw} \\ r_{yx} & 1 & r_{yw} \\ r_{zx} & r_{wy} & r_{zw} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & 1 & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{wy} & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r^{xx} & r^{xy} & r^{xz} & r^{xw} \\ r^{yx} & r^{yy} & r^{yz} & r^{yw} \\ r^{zx} & r^{zy} & r^{zz} & r^{zw} \\ r^{wx} & r^{wy} & r^{wz} & r^{ww} \end{pmatrix}$$

$$r^{xx} = \frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\begin{vmatrix} 1 & r_{yz} & r_{yw} \\ r_{zy} & 1 & r_{zw} \\ r_{wy} & r_{wz} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\left(1 + 2r_{yz}r_{zw}r_{wy} - r_{yz}{}^2 - r_{yw}{}^2 - r_{zw}\right)$$

$$r^{yy} = \frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\begin{vmatrix} 1 & r_{xz} & r_{xw} \\ r_{zx} & 1 & r_{zw} \\ r_{wx} & r_{wz} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\left(1 + 2r_{xz}r_{zw}r_{wx} - r_{xz}{}^2 - r_{xw}{}^2 + r_{zw}{}^2\right)$$

$$r^{xy} = -\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\begin{vmatrix} r_{yx} & r_{yz} & r_{yw} \\ r_{zx} & 1 & r_{zw} \\ r_{wx} & r_{wz} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\left(r_{yx} + r_{yz}r_{zw}r_{wx} + r_{yw}r_{zx}r_{wz} - \left(r_{yx}r_{zw}{}^2 + r_{yz}r_{zx} + r_{yw}r_{wx}\right)\right)$$

$$\therefore \frac{-r^{xy}}{\sqrt{r^{xx}}\sqrt{r^{yy}}} = \frac{r_{yx} + r_{yz}r_{zw}r_{wx} + r_{yw}r_{zx}r_{wz} - \left(r_{yx}{r_{zw}}^2 + r_{yz}r_{zx} + r_{yw}r_{wx}\right)}{\sqrt{\left(1 + 2r_{yz}r_{zw}r_{wy} - {r_{yz}}^2 - {r_{yw}}^2 - r_{zw}\right)\left(1 + 2r_{xz}r_{zw}r_{wx} - {r_{xz}}^2 - {r_{xw}}^2 + {r_{zw}}^2\right)}} \qquad (i)$$

wの影響を取り除きます。 $r_{xy|w}$を計算するということです。

$$\boldsymbol{R_{xyw}} = \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xw} \\ r_{yx} & 1 & r_{yw} \\ r_{wx} & r_{wy} & 1 \end{pmatrix}$$

(この行列式が $|\boldsymbol{R_{xyw}}| = r^{zz}$

であることは定義から明らかですが、これを確認してください)

$$\boldsymbol{R_{xyw}}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{R_{xyw}}|}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & r_{yw} \\ r_{wy} & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} r_{yx} & r_{yw} \\ r_{wx} & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_{yx} & 1 \\ r_{wx} & r_{wy} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} r_{xy} & r_{xw} \\ r_{wy} & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & r_{xw} \\ r_{wx} & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & r_{xy} \\ r_{wx} & r_{wy} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} r_{xy} & r_{xw} \\ 1 & r_{yw} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & r_{xw} \\ r_{yx} & r_{yw} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & r_{xy} \\ r_{yx} & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {r_{xy|w}}^{xx} & {r_{xy|w}}^{xy} & {r_{xy|w}}^{xw} \\ {r_{xy|w}}^{yx} & {r_{xy|w}}^{yy} & {r_{xy|w}}^{yw} \\ {r_{xy|w}}^{wx} & {r_{xy|w}}^{wy} & {r_{xy|w}}^{ww} \end{pmatrix}$$

$$r_{xy|w} = \frac{-{r_{xy|w}}^{xy}}{\sqrt{{r_{xy|w}}^{xx}}\sqrt{{r_{xy|w}}^{yy}}} = \frac{\begin{vmatrix} r_{yx} & r_{yw} \\ r_{wx} & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & r_{yw} \\ r_{wy} & 1 \end{vmatrix}}\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & r_{xw} \\ r_{wx} & 1 \end{vmatrix}}}$$

$$= \frac{r_{yx} - r_{yw}r_{wx}}{\sqrt{\left(1 - {r_{yw}}^2\right)\left(1 - {r_{wx}}^2\right)}}$$

$$r_{xy|w} = \frac{r_{yx} - r_{yw}r_{wx}}{\sqrt{\left(1 - {r_{yw}}^2\right)\left(1 - {r_{wx}}^2\right)}} \qquad (ii)$$

次に偏相関係数 $r_{xz/w}$について考えます。

$$\boldsymbol{R_{xzw}} = \begin{pmatrix} 1 & r_{xz} & r_{xw} \\ r_{zx} & 1 & r_{zw} \\ r_{wx} & r_{wz} & 1 \end{pmatrix}$$

($|\boldsymbol{R_{xzw}}| = r^{yy}$ であることを覚えておいてください)

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{xzw}}{}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{xzw}}|}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & r_{zw}\\ r_{zw} & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}r_{zx} & r_{zw}\\ r_{wx} & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}r_{zx} & 1\\ r_{wx} & r_{wz}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}r_{xz} & r_{xw}\\ r_{wz} & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & r_{xw}\\ r_{wx} & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & r_{xz}\\ r_{wx} & r_{wz}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}r_{xz} & r_{xw}\\ 1 & r_{zw}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & r_{xw}\\ r_{zx} & r_{zw}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & r_{xz}\\ r_{zx} & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}r_{xz|w}{}^{xx} & r_{xz|w}{}^{xz} & r_{xz|w}{}^{xw}\\ r_{xz|w}{}^{zx} & r_{xz|w}{}^{zz} & r_{xz|w}{}^{zw}\\ r_{xz|w}{}^{wx} & r_{xz|w}{}^{wz} & r_{xz|w}{}^{ww}\end{pmatrix}$$

$$r_{xz|w}=\frac{-r_{xz|w}{}^{xz}}{\sqrt{r_{xz|w}{}^{xx}}\sqrt{r_{xz|w}{}^{zz}}}=\frac{\begin{vmatrix}r_{zx} & r_{zw}\\ r_{wx} & 1\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}1 & r_{zw}\\ r_{wz} & 1\end{vmatrix}}\sqrt{\begin{vmatrix}1 & r_{xw}\\ r_{wx} & 1\end{vmatrix}}}$$

$$=\frac{r_{zx}-r_{zw}r_{wx}}{\sqrt{(1-r_{zw}{}^{2})(1-r_{wx}{}^{2})}}$$

$$r_{xz|w}==\frac{r_{zx}-r_{zw}r_{wx}}{\sqrt{(1-r_{zw}{}^{2})(1-r_{wx}{}^{2})}}\qquad(iii)$$

次に$r_{yz/w}$について考えます。

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{yzw}}=\begin{pmatrix}1 & r_{yz} & r_{yw}\\ r_{zy} & 1 & r_{zw}\\ r_{wy} & r_{wz} & 1\end{pmatrix}$$

(Pay attention, $|\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{yzw}}|=r^{yy}$)

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{yzw}}{}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{yzw}}|}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & r_{zw}\\ r_{wz} & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}r_{zy} & r_{zw}\\ r_{wy} & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}r_{zy} & 1\\ r_{wy} & r_{wz}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}r_{yz} & r_{yw}\\ r_{wz} & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & r_{yw}\\ r_{wy} & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & r_{yz}\\ r_{wy} & r_{wz}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}r_{yz} & r_{yw}\\ 1 & r_{zw}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & r_{yw}\\ r_{zy} & r_{zw}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & r_{yz}\\ r_{zy} & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}r_{yz|w}{}^{yy} & r_{yz|w}{}^{yz} & r_{yz|w}{}^{yw}\\ r_{yz|w}{}^{zy} & r_{yz|w}{}^{zz} & r_{yz|w}{}^{zw}\\ r_{yz|w}{}^{wy} & r_{yz|w}{}^{wz} & r_{yz|w}{}^{ww}\end{pmatrix}$$

$$r_{yz|w}=\frac{-r_{yz|w}{}^{yz}}{\sqrt{r_{yz|w}{}^{yy}}\sqrt{r_{yz|w}{}^{zz}}}=\frac{\begin{vmatrix}r_{zy} & r_{zw}\\ r_{wy} & 1\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}1 & r_{zw}\\ r_{wz} & 1\end{vmatrix}}\sqrt{\begin{vmatrix}1 & r_{yw}\\ r_{wy} & 1\end{vmatrix}}}$$

$$r_{yz|w}=\frac{r_{zy}-r_{zw}r_{wy}}{\sqrt{(1-r_{zw}{}^{2})(1-r_{yw}{}^{2})}}\qquad(iv)$$

ここから、3 x 3 の $r_{xy/w}$, $r_{xz/w}$ and $r_{yz/w}$相関行列を作ります

$$\boldsymbol{R}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 1 & r_{xy/w} & r_{xz/w} \\ r_{xy/w} & 1 & r_{yz/w} \\ r_{xz/w} & r_{yz/w} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}{}^{-1} = \frac{1}{\left|\boldsymbol{R}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}\right|} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & r_{yz/w} \\ r_{yz/w} & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} r_{xy/w} & r_{yz/w} \\ r_{xz/w} & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_{xy/w} & 1 \\ r_{xz/w} & r_{yz/w} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} r_{xy/w} & r_{xz/w} \\ r_{yz/w} & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & r_{xz/w} \\ r_{xz/w} & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & r_{xy/w} \\ r_{xz/w} & r_{yz/w} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} r_{xy/w} & r_{xz/w} \\ 1 & r_{yz/w} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & r_{xz/w} \\ r_{xy/w} & r_{yz/w} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & r_{xy/w} \\ r_{xy/w} & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_{xyz/w}{}^{xx} & r_{xyz/w}{}^{xy} & r_{xyz/w}{}^{xz} \\ r_{xyz/w}{}^{yx} & r_{xyz/w}{}^{yy} & r_{xyz/w}{}^{yz} \\ r_{xyz/w}{}^{zx} & r_{xyz/w}{}^{zy} & r_{xyz/w}{}^{zz} \end{pmatrix}$$

$$r_{xy|zw} = r_{\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}} = \frac{-r_{xyz|w}{}^{xy}}{\sqrt{r_{xyz|w}{}^{xx}}\sqrt{r_{xyz|w}{}^{yy}}} \qquad (v)$$

$r_{xyz|w}{}^{xx}$について

$$r_{xyz|w}{}^{xx} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_{yz|w} \\ r_{r_{yz|w}} & 1 \end{vmatrix}}{\left|\boldsymbol{R}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}\right|} = \frac{1 - r_{yz|w}{}^2}{\left|\boldsymbol{R}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}\right|}$$

$$= \frac{1}{\left|\boldsymbol{R}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}\right|}\left(1 - \frac{\left(r_{zy} - r_{zw}r_{wy}\right)^2}{\left(1 - r_{zw}{}^2\right)\left(1 - r_{yw}{}^2\right)}\right)$$

$$= \frac{1 - r_{zw}{}^2 - r_{yw}{}^2 + r_{zw}{}^2 r_{yw}{}^2 - r_{zy}{}^2 + 2r_{zy}r_{zw}r_{wy} - r_{zw}{}^2 r_{yw}{}^2}{\left|\boldsymbol{R}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}\right|\left(1 - r_{zw}{}^2\right)\left(1 - r_{yw}{}^2\right)}$$

$$= \frac{1 + 2r_{zy}r_{zw}r_{wy} - r_{zw}{}^2 - r_{yw}{}^2 - r_{zy}{}^2}{\left|\boldsymbol{R}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}\right|\left(1 - r_{zw}{}^2\right)\left(1 - r_{yw}{}^2\right)}$$

$$r_{xyz|w}{}^{xx} = \frac{1 + 2r_{zy}r_{zw}r_{wy} - r_{zw}{}^2 - r_{yw}{}^2 - r_{zy}{}^2}{\left|\boldsymbol{R}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}\right|\left(1 - r_{zw}{}^2\right)\left(1 - r_{yw}{}^2\right)} \qquad (vi)$$

$r_{xyz|w}{}^{yy}$について、

$$r_{xyz|w}{}^{yy} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_{xz|w} \\ r_{xz|w} & 1 \end{vmatrix}}{\left|\boldsymbol{R}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}\right|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_{xz|w} \\ r_{xz|w} & 1 \end{vmatrix}}{\left|\boldsymbol{R}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}\right|} = \frac{1 - r_{xz|w}{}^2}{\left|\boldsymbol{R}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}\right|}$$

$$= \frac{1}{\left|\boldsymbol{R}_{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}\right|}\left(1 - \frac{\left(r_{zx} - r_{zw}r_{wx}\right)^2}{\left(1 - r_{zw}{}^2\right)\left(1 - r_{wx}{}^2\right)}\right)$$

$$= \frac{(1 - r_{zw}{}^2)(1 - r_{wx}{}^2) - (r_{zx} - r_{zw}r_{wx})^2}{\left|\boldsymbol{R}_{\breve{x}\breve{y}\breve{z}}\right|(1 - r_{zw}{}^2)(1 - r_{wx}{}^2)}$$

$$= \frac{1 - r_{zw}{}^2 - r_{wx}{}^2 + r_{zw}{}^2 r_{wx}{}^2 - (r_{zx}{}^2 - 2r_{zx}r_{zw}r_{wx} + r_{zw}{}^2 r_{wx}{}^2)^2}{\left|\boldsymbol{R}_{\breve{x}\breve{y}\breve{z}}\right|(1 - r_{zw}{}^2)(1 - r_{wx}{}^2)}$$

$$= \frac{1 + 2r_{zx}r_{zw} - r_{zw}{}^2 - r_{wx}{}^2 - r_{zx}{}^2}{\left|\boldsymbol{R}_{\breve{x}\breve{y}\breve{z}}\right|(1 - r_{zw}{}^2)(1 - r_{wx}{}^2)}$$

$$r_{xyz|w}{}^{yy} = \frac{1 + 2r_{zx}r_{zw} - r_{zw}{}^2 - r_{wx}{}^2 - r_{zx}{}^2}{\left|\boldsymbol{R}_{\breve{x}\breve{y}\breve{z}}\right|(1 - r_{zw}{}^2)(1 - r_{wx}{}^2)} \qquad (vii)$$

$r_{xyz|w}{}^{xy}$について

$$r_{xyz|w}{}^{xy} = \frac{-\begin{vmatrix} r_{xy|w} & r_{yz|w} \\ r_{xz|w} & 1 \end{vmatrix}}{\left|\boldsymbol{R}_{\breve{x}\breve{y}\breve{z}}\right|} = \frac{-\left(r_{xy|w} - r_{yz|w}r_{xz|w}\right)}{\left|\boldsymbol{R}_{\breve{x}\breve{y}\breve{z}}\right|}$$

$$= \frac{-\left(\frac{r_{yx} - r_{yw}r_{wx}}{\sqrt{(1 - r_{yw}{}^2)(1 - r_{wx}{}^2)}} - \frac{r_{zy} - r_{zw}r_{wy}}{\sqrt{(1 - r_{zw}{}^2)(1 - r_{yw}{}^2)}} \frac{r_{zx} - r_{zw}r_{wx}}{\sqrt{(1 - r_{zw}{}^2)(1 - r_{wx}{}^2)}}\right)}{\left|\boldsymbol{R}_{\breve{x}\breve{y}\breve{z}}\right|}]$$

$$= \frac{-\left(\left(r_{yx} - r_{yw}r_{wx}\right)(1 - r_{zw}{}^2) - \left(r_{zy} - r_{zw}r_{wy}\right)\left(r_{zx} - r_{zw}r_{wx}\right)\right)}{\left|\boldsymbol{R}_{\breve{x}\breve{y}\breve{z}}\right|(1 - r_{zw}{}^2)\sqrt{(1 - r_{yw}{}^2)(1 - r_{wx}{}^2)}}$$

$$= \frac{-\left(r_{yx} - r_{yw}r_{wx} - r_{zw}{}^2 + r_{yw}r_{wx}r_{zw}{}^2 - \left(r_{zy}r_{zx} - r_{zw}r_{wy}r_{zx} - r_{zy}r_{zw}r_{wx} + r_{yw}r_{wx}r_{zw}{}^2\right)\right)}{\left|\boldsymbol{R}_{\breve{x}\breve{y}\breve{z}}\right|(1 - r_{zw}{}^2)\sqrt{(1 - r_{yw}{}^2)(1 - r_{wx}{}^2)}}$$

$$\frac{-\left(r_{yx} + r_{zw}r_{wy}r_{zx} + r_{zy}r_{zw}r_{wx} - r_{yw}r_{wx} - r_{zw}{}^2 - r_{zy}r_{zx}\right)}{\left|\boldsymbol{R}_{\breve{x}\breve{y}\breve{z}}\right|(1 - r_{zw}{}^2)\sqrt{(1 - r_{yw}{}^2)(1 - r_{wx}{}^2)}}$$

$$r_{xyz|w}{}^{xy} = \frac{-\left(r_{yx} + r_{zw}r_{wy}r_{zx} + r_{zy}r_{zw}r_{wx} - r_{yw}r_{wx} - r_{zw}{}^2 - r_{zy}r_{zx}\right)}{\left|\boldsymbol{R}_{\breve{x}\breve{y}\breve{z}}\right|(1 - r_{zw}{}^2)\sqrt{(1 - r_{yw}{}^2)(1 - r_{wx}{}^2)}} \qquad (viii)$$

すべてを整理して並べると

$$(i) \qquad \frac{-r^{xy}}{\sqrt{r^{xx}}\sqrt{r^{yy}}} = \frac{r_{yx} + r_{yz}r_{zw}r_{wx} + r_{yw}r_{zx}r_{wz} - \left(r_{yx}r_{zw}{}^2 + r_{yz}r_{zx} + r_{yw}r_{wx}\right)}{\sqrt{\left(1 + 2r_{yz}r_{zw}r_{wy} - r_{yz}{}^2 - r_{yw}{}^2 - r_{zw}\right)\left(1 + 2r_{xz}r_{zw}r_{wx} - r_{xz}{}^2 - r_{xw}{}^2 + r_{zw}{}^2\right)}}$$

$$(v) \qquad r_{xy/zw} = r_{\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}} = \frac{-r_{xyz/w}{}^{xy}}{\sqrt{r_{xyz/w}{}^{xx}}\sqrt{r_{xyz/w}{}^{yy}}}$$

$$(vi)\qquad r_{xyz|w}{}^{xx} = \frac{1 + 2r_{zy}r_{zw}r_{wy} - r_{zw}{}^2 - r_{yw}{}^2 - r_{zy}{}^2}{\left|\boldsymbol{R}_{\widetilde{xyz}}\right|(1 - r_{zw}{}^2)(1 - r_{yw}{}^2)}$$

$$(vii)\qquad r_{xyz|w}{}^{yy} = \frac{1 + 2r_{zx}r_{zw} - r_{zw}{}^2 - r_{wx}{}^2 - r_{zx}{}^2}{\left|\boldsymbol{R}_{\widetilde{xyz}}\right|(1 - r_{zw}{}^2)(1 - r_{wx}{}^2)}$$

$$(viii)\qquad r_{xyz|w}{}^{xy} = \frac{-(r_{yx} + r_{zw}r_{wy}r_{zx} + r_{zy}r_{zw}r_{wx} - r_{yw}r_{wx} - r_{zw}{}^2 - r_{zy}r_{zx})}{\left|\boldsymbol{R}_{\widetilde{xyz}}\right|(1 - r_{zw}{}^2)\sqrt{(1 - r_{yw}{}^2)(1 - r_{wx}{}^2)}}$$

(vi), (vii) と $(viii)$ を(v)に入れます。

$$r_{xy|zw} = \frac{-r_{xyz|w}{}^{xy}}{\sqrt{r_{xyz|w}{}^{xx}}\sqrt{r_{xyz|w}{}^{yy}}} = \frac{r_{yx} + r_{zw}r_{wy}r_{zx} + r_{zy}r_{zw}r_{wx} - r_{yw}r_{wx} - r_{zw}{}^2 - r_{zy}r_{zx}}{\sqrt{1 + 2r_{zy}r_{zw}r_{wy} - r_{zw}{}^2 - r_{yw}{}^2 - r_{zy}{}^2}\sqrt{1 + 2r_{zx}r_{zw} - r_{zw}{}^2 - r_{wx}{}^2 - r_{zx}{}^2}} \qquad (ix)$$

(i) を (ix)に入れます。

$$r_{xy|zw} = \frac{-r^{xy}}{\sqrt{r^{xx}}\sqrt{r^{yy}}}$$

結論として

$$r_{x_1x_2/x_3x_4} = r_{x_1x_2/rest} = \frac{-r^{x_1x_2}}{\sqrt{r^{x_1x_1}}\sqrt{r^{x_2x_2}}}$$

となります。変数の数がpの時、p番目の変数の影響を取り除いた残りの$(p-1)$個の変数の偏相関係数を使って、$(p-1)$の大きさの正方行列が作れます。この正方行列を使って、そこから$(p-1)$ 番目の変数の影響を取り除くということを繰り返せば、次のような偏相関係数が出来るはずです。

$$r_{x_1x_2/x_3\cdots x_p} = r_{x_1x_2/rest} = \frac{-r^{x_1x_2}}{\sqrt{r^{x_1x_1}}\sqrt{r^{x_2x_2}}}$$

しかし、そのためには目的に２変数が一番目と２番目の行、列にある必要があります。そのために、行列を入れ替えると、図 67 に示したように、そのたびに符号が入れ替わります。

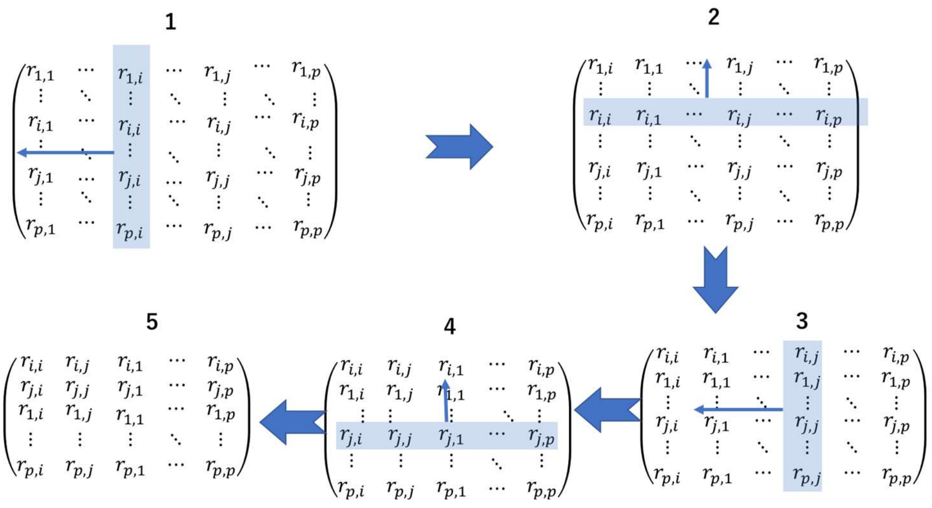

図 67. 行と列の入れ替え.

しかし、この場合は符号を考える必要はありません。 次のようになっていて、符号の変換回数が偶数だからです。

$$sing\ (R) = (-1)^{2(i-1)}(-1)^{2(j-1)}$$

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,i} & \cdots & r_{1,j} & \cdots & r_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{i,1} & \cdots & r_{i,i} & \cdots & r_{i,j} & \cdots & r_{i,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{j,1} & \cdots & r_{j,i} & \cdots & r_{j,j} & \cdots & r_{j,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p,1} & \cdots & r_{p,i} & \cdots & r_{p,j} & \cdots & r_{p,p} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_{i,i} & r_{i,j} & r_{i,1} & \cdots & r_{i,i-1} & r_{i,i+1} & \cdots & r_{i,j-1} & r_{i,j+1} & \cdots & r_{i,p} \\ r_{j,i} & r_{j,j} & r_{j,1} & \cdots & r_{j,i-1} & r_{j,i+1} & \cdots & r_{j,j-1} & r_{j,j+1} & \cdots & r_{j,p} \\ r_{1,i} & r_{1,j} & r_{1,1} & \cdots & r_{1,i-1} & r_{1,i+1} & \cdots & r_{1,j-1} & r_{1,j+1} & \cdots & r_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{i-1,i} & r_{i-1,j} & r_{i-1,1} & \cdots & r_{i-1,i-1} & r_{i-1,i+1} & \cdots & r_{i-1,j-1} & r_{i-1,j+1} & \cdots & r_{i-1,p} \\ r_{i+1,i} & r_{i+1,j} & r_{i+1,1} & \cdots & r_{i+1,i-1} & r_{i+1,i+1} & \cdots & r_{i+1,j-1} & r_{i+1,j+1} & \cdots & r_{i+1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{j-1,i} & r_{j-1,j} & r_{j-1,1} & \cdots & r_{j-1,i-1} & r_{j-1,i+1} & \cdots & r_{j-1,j-1} & r_{j-1,j+1} & \cdots & r_{j-1,p} \\ r_{j+1,i} & r_{j+1,j} & r_{j+1,1} & \cdots & r_{j+1,i-1} & r_{j+1,i+1} & \cdots & r_{j+1,j-1} & r_{j+1,j+1} & \cdots & r_{j+1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p,i} & r_{p,j} & r_{p,1} & \cdots & r_{p,i-1} & r_{p,i+1} & \cdots & r_{p,j-1} & r_{p,j+1} & \cdots & r_{p,p} \end{pmatrix}$$

ということは、次のように目的とする変数のr^{ij}、r^{ii}、r^{jj}がどこにあるかを逆行列から探し出せばよいだけです。

$$\begin{pmatrix} r^{1,1} & \cdots & r^{1,i} & \cdots & r^{1,j} & \cdots & r^{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^{i,1} & \cdots & \boxed{r^{i,i}} & \cdots & \boxed{r^{i,j}} & \cdots & r^{i,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^{j,1} & \cdots & r^{j,i} & \cdots & \boxed{r^{j,j}} & \cdots & r^{j,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^{p,1} & \cdots & r^{p,i} & \cdots & r^{p,j} & \cdots & r^{p,p} \end{pmatrix}$$

結論的に、以下の簡単な式になります。

$$\mathrm{r}_{ij/rest} == \frac{-r^{ij}}{\sqrt{r^{ii}}\sqrt{r^{jj}}}$$