式 1: 和集合

When $\mathrm{A} = \{a_{1,}a_2 \cdots a_l, c_1, c_2, \cdots c_n\}$ and $\mathrm{B} = \{b_1, b_2, \cdots b_m, c_1, c_2, \cdots c_n, \}$,

$$D = A \cup B = \{a_{1,}a_2 \cdots a_l, b_1, b_2, \cdots b_m, c_1, c_2, \cdots c_m\}$$

式 2: 積集合

When $\mathrm{A} = \{a_{1,}a_2 \cdots a_l, c_1, c_2, \cdots c_n\}$ and $\mathrm{B} = \{b_1, b_2, \cdots b_m, c_1, c_2, \cdots c_n, \}$

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{ c_1, c_2, \cdots c_m\}$$

式 3: 和集合の確率

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

式 4: 積集合の確率

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

式 5: ２つの事象が続いて起こる確率

B が A から独立していれば

$$\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(|A) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

式 6: 二項係数

$$_nC_r = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \bigl(n-(n-k)\bigr)}{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

式 7: 二項確率

$$p(k) = \quad _nC_k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$p(k) = \binom{n}{k} \mathrm{p}^{n-k} (1-p)^k$$

式 8: 二項確率の展開

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{p}^{n-k} q^k$$

式 9: 期待値

$$E\bigl(f(x)\bigr) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, p_i$$

ここで

$f(x_i)$: 事象 iによって得られる値

$p(i)$: 事象 iが起きる確率

$E\bigl(f(x)\bigr)$: 期待値

式 10: 平均

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$\bar{x}$: xの平均

p_i: iの確率

式 11: 平均値からの距離の二乗和(SS).

$$\mathrm{SS} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$\bar{x}$:　平均値

n: データ数（サンプルサイズ）

式 12: 二項係数の対数

$$\log\mathrm{W}(x) = \log(n!) - \log(x!) - \log(n-x)! + k\log(p) + (n-x)\log(q)$$

式 13: 分散の簡易計算

$$V_x = \mathrm{E}(x^2) - \mathrm{E}(x)^2$$

V_x: xの分散

式 14: 母集団の平均値周りの二次の積率

$$\mathrm{E}((M-\mu)^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

式 15: 標準誤差

$$\mathrm{S.E} = \sqrt{E(M^2)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

式 16: ポアソン分布

$$\mathrm{P(X = k)} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

式 17: 正規分布

$$\mathrm{P}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

式 18: ガンマ（Γ）関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

z: 複素数, z ≥ 0 （複素平面上で）

式 19: ガンマ（Γ）の性質

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

式 20: カイ二乗分布

$$\mathrm{P}({\chi^2}_{\phi}) = \frac{{\chi^2}_{\phi}^{\frac{\phi}{2}-1}}{2^{\frac{\phi}{2}}\Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)} e^{\frac{-{\chi^2}_{\phi}}{2}}$$

ϕ: 自由度

式 21: カイ二乗値

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

f: 観測値、e: 期待値

式 22: ベータ（β）関数

$$\beta(p,q)) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

式 23: スチューデントの t 分布

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{n}\beta\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)(\frac{t^2}{n^2}+1)^{\frac{n}{2}+1}}$$

式 24: スチューデントの t 値

$$\mathrm{t} = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

式 25: F分布

$$P(F) = \frac{{n_1}^{\frac{n_1}{2}}{n_2}^{\frac{n_2}{2}}}{\beta(n_1,n_2)} \cdot \frac{F^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1F+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$

式 26: 微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$f'(x)$：$f(x)$の微分

式 27: 平均値の定理

$$\frac{f(\,b\,)-f(a)}{b-a} = f'(c),\ (a \le c \le b)$$

式 28: 平均値の定理の展開

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(c_1)$$

式 29: 平均値の定理の２次展開

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a)$$

式 30: Taylor 展開（1）

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

式 31: Taylor 展開（2）

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+\frac{(x-a)}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2*1}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3*2*1}f'''(a) \quad + \qquad +\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

式 32: 関数の積の微分

$$\{g(x)f(x)\}' = g(x)f'(x)+g'(x)f(x)$$

式 33: 部分積分

$$\int g'(x)f(x)dx = g(x)f(x)-\int g(x)f'(x)dx$$

式 34: ネイピア数（1）

$$e=\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}}$$

式 35: 対数の微分

$$\frac{d\log_e x}{dx}=\frac{1}{x}$$

式 36: 指数の微分

$$\frac{df(x)}{dx}=f(x)$$

式 37: ネイピア数（2）

$$1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=e$$

式 38: データの構造

$$x_i = M + e_i$$

M:平均

e_i: 平均からの偏差

式 39: 全 SS

$$SS_{total}=nSS_A+mSS_B$$

式 40: 異なる集団の和の分散(コミにした分散)

$$\sigma_{A+B}{}^2=\frac{(m-1)\sigma_A{}^2+(n-1)\sigma_B{}^2}{m+n-2}$$

式 41: 差の分散（コミにした分散）

$$\sigma_{A-B}{}^2=\frac{(m-1)\sigma_{\hat{A}}{}^2+(n-1)\sigma_{\hat{B}}{}^2}{m+n-2}$$

式 42: 対になったデータの t 値

$$\mathrm{t}=\frac{M_c}{\frac{\sigma_c}{\sqrt{n}}}$$

式 43: 対になっていないデータの t 値

$$\mathrm{t} = \frac{M_A - M_B}{\sigma_{A-B}\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$

式 44: 寄与率

$$r^2 = \frac{{SS_{xy}}^2}{SS_x SS_y}$$

r^2:寄与率

式 45: 相関係数

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_x}\sqrt{SS_y}}$$

式 46: コーシー・シュワルツの不等式

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2 + \zeta^2} \geq \alpha\delta + \beta\varepsilon + \gamma\,\zeta$$

式 47: カイ二乗の観測値

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

f_i: 部分集団iの観測値

e_i: 部分集団iの期待値

式 48: 行列の和

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2j} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & & & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2j} & & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & & & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{2n} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & a_{ij}+b_{ij} & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & +a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

式 49: 行列とスカラーの積

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_n \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \dots & +a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_n \\ \vdots & \alpha a_{ij} & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \dots & \alpha a_{nn} \end{pmatrix}$$

式 50: 行列の積

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & a_{2j} & & a_{2n} \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{i1} & & & a_{ij} & & a_{in} \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} & & b_{2j} & & b_{2n} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots \\
b_{i1} & & & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots \\
b_{n1} & b_{2n} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{11}b_{11} + \cdots a_{1k}b_{k1} \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots a_{1k}b_{kn} \dots a_{1n}b_{nn} \\
\vdots & a_{i1}b_{1j} + \cdots a_{ik}b_{kj} \cdots + a_{in}b_{nj} & \vdots \\
a_{n1}b_{11} + \cdots a_{nk}b_{k1} \cdots + a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + \cdots a_{nk}b_{kn} \cdots + a_{nn}b_{nn}
\end{pmatrix}
$$

式 51：行列計算の順序

$$
\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}
$$

$$
(\mathbf{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})
$$

式 52：余因子行列（3×3）

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}
$$

$$
\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}
\end{pmatrix}
$$

式 53：逆行列

$$
\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{A}}}{|\boldsymbol{A}|}
$$

式 54：逆行列（3×3）

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}
$$

,

$$
\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}
\begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}
\end{pmatrix}
$$

式 55：余因子展開

$$
\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a^{ij} = a_{1j}a^{1j} + a_{2j}a^{2j} + \cdots + a_{nj}a^{nj} = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
j = 1, 2, \cdots, n
$$

式 56：クラメルの公式

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

の時

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$$

$$x_i=\frac{|\boldsymbol{A_i}|}{|\boldsymbol{A}|}$$

ここで $\boldsymbol{A_i}$ は以下の通り

$$\boldsymbol{A_i}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

式 57: 固有方程式

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

式 58: 部分行列の積

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1q} & a_{1q+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \boldsymbol{A}_{11} & \vdots & \vdots & \boldsymbol{A}_{12} & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & a_{pq+1} & \cdots & a_{pn} \\ \hline a_{p+11} & \cdots & a_{p+11} & a_{p+1\,q+1} & \cdots & a_{p+1\,q+1} \\ \vdots & \boldsymbol{A}_{21} & \vdots & \vdots & \boldsymbol{A}_{22} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & a_{nq+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & \cdots & b_{1p} & b_{1p+1} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \boldsymbol{B}_{11} & \vdots & \vdots & \boldsymbol{B}_{12} & \vdots \\ b_{q1} & \cdots & b_{qp} & b_{qp+1} & \cdots & b_{qn} \\ \hline b_{q+1\,1} & \cdots & b_{q+1\,p} & b_{q+1p+1} & \cdots & b_{q+1n} \\ \vdots & \boldsymbol{B}_{21} & \vdots & \vdots & \boldsymbol{B}_{22} & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{n\,p} & b_{n\,p+1} & \cdots & b_{n\,n} \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21}: p\times p\ \text{行列}$$

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22}: (n-p)\times\ (n-p)\ \text{行列}$$

式 59: 行列の相似

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$$

式 60:　対角化

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

式 61: スペクトル分解

$$\boldsymbol{A} = \lambda_1 \boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_1}^T + \lambda_2 \boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_2}^T + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{e_p}\boldsymbol{e_p}^T$$

or

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_i}^T$$

$\boldsymbol{e_i}$: *固有行列の単位行列*

$$\boldsymbol{e_i} \perp \boldsymbol{e_j}$$

式 62: 行列のべき乗

$$\boldsymbol{A^m} = \boldsymbol{P\Lambda^m P^{-1}}$$

式 63: 二次形式の最大・最小 Maximum and minimum in quadratic form

行列$\boldsymbol{A}$が正定置であれば

$$\max_{x \neq 0} \frac{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}} = \lambda_1$$

同様に

$$\min_{x \neq 0} \frac{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}} = \lambda_p$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0$$

式 64: コーシー・シュワルツの不等式

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p\right)^2 \leq \left({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_p}^2\right)\left({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_p}^2\right)$$

式 65: コーシー・sy ワルツの不等式の拡張

$$(\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{\beta}) \geq (\boldsymbol{\alpha^T \beta})^2$$

ここで

$$\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\alpha} = c \boldsymbol{B}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\beta E} \ ,$$

式 66: ラグランジュの未定乗数法

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial(\boldsymbol{x},\lambda)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial x_p} \\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = 0$$

$$L(\boldsymbol{x},\lambda) = f(\boldsymbol{x}) - \lambda g(\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_p} \end{pmatrix}$$

式 67: 分散・共分散行列

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} c_{1k}c_{1k} & \sum_{k=1}^{n} c_{1k}c_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} c_{1k}c_{pk} \\ \sum_{k=1}^{n} c_{2k}c_{1k} & \sum_{k=1}^{n} c_{2k}c_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} c_{2k}c_{pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} c_{pk}c_{1k} & \sum_{k=1}^{n} c_{pk}c_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} c_{pk}c_{pk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{p2} \end{pmatrix}$$

式 68: 相関行列

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \dfrac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \dfrac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \dfrac{\sigma_{21}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \dfrac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \dfrac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\sigma_{p1}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \dfrac{\sigma_{p2}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \dfrac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

式 69: 分散・共分散行列 ($\boldsymbol{\Sigma}$)、相関行列($\boldsymbol{\rho}$) 、分散行列の関係($\boldsymbol{V}$).

$$\boldsymbol{V}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{V}^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\Sigma}$$

$$\boldsymbol{V}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\rho}$$

式 70: マハラノビスの距離

$$D_{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}} = \sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}$$

($\boldsymbol{\Sigma}$: 分散共分散行列)

式 71: 疑似逆行列

$$\boldsymbol{X}^{\#} = (\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{T}$$

式 72: 特異値分解

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U\Sigma V}^{T}$$

$$p < n \text{のとき}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_p & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{p\times n}$$

$$p > n \text{のとき}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{p\times n}$$

式 73: 重回帰

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X_{+1}} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A_{+1}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X_{+1}A_{+1}} + \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{A_{+1}} = \boldsymbol{X_{+1}}^{\#}\boldsymbol{Y}$$

式 74: 偏相関係数

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\begin{pmatrix} \frac{SS_{yy}SS_{zz} - {SS_{yz}}^2}{SS_{yy}SS_{zz}} & \frac{SS_{yz}SS_{zx} - SS_{xy}SS_{zz}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{xx}}SS_{zz}} & \frac{SS_{xy}SS_{yz} - SS_{xz}SS_{yy}}{\sqrt{SS_{xx}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{yy}} \\ \frac{SS_{yz}SS_{zx} - SS_{xy}SS_{zz}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{xx}}SS_{zz}} & \frac{SS_{zz}SS_{xx} - {SS_{zx}}^2}{SS_{zz}SS_{xx}} & \frac{SS_{xy}SS_{zx} - SS_{yz}SS_{xx}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{xx}} \\ \frac{SS_{xy}SS_{yz} - SS_{xz}SS_{yy}}{\sqrt{SS_{xx}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{yy}} & \frac{SS_{xy}SS_{zx} - SS_{yz}SS_{xx}}{\sqrt{SS_{yy}}\sqrt{SS_{zz}}SS_{xx}} & \frac{SS_{xx}SS_{yy} - {SS_{xy}}^2}{SS_{xx}SS_{yy}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r^{xx} & r^{xy} & r^{xz} \\ r^{yx} & r^{yy} & r^{yz} \\ r^{zx} & r^{yz} & r^{zz} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{r}_{xy/z} = \frac{-r^{xy}}{\sqrt{r^{xx}}\sqrt{r^{yy}}}$$

$$\mathrm{r}_{ij/rest} == \frac{-r^{ij}}{\sqrt{r^{ii}}\sqrt{r^{jj}}}$$

式 75: 線形判別分析

$$
\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}
\sum_{k=1}^{m} n_k\,{\mu_{k1}}^2 & \sum_{k=1}^{m} n_k\mu_{k1}\mu_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} n_k\mu_{k1}\mu_{k2} \\
\sum_{k=1}^{m} n_k\,\mu_{k2}\mu_{k1} & \sum_{k=1}^{m} n_k{\mu_{k2}}^2 & \cdots & \sum_{k=1}^{m} n_k\mu_{k2}\mu_{kp} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sum_{k=1}^{m} n_k\,\mu_{kp}\mu_{k1} & \sum_{k=1}^{m} n_k\mu_{kp}\mu_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} n_k\,{\mu_{kp}}^2
\end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}
\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m}}\sum_{i=1}^{n_k} {m_{ki1}}^2 & \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m}}\sum_{i=1}^{n_k} m_{ki}\ m_{ki} & \cdots & \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m}}\sum_{i=1}^{n_k} m_{ki1}m_{kip} \\
\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m}}\sum_{i=1}^{n_k} m_{ki2}m_{ki} & \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m}}\sum_{i=1}^{n_k} {m_{ki2}}^2 & \cdots & \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m}}\sum_{i=1}^{n_k} m_{ki2}m_{kip} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m}}\sum_{i=1}^{n_k} m_{kip}m_{ki1} & \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m}}\sum_{i=1}^{n_k} m_{kip}m_{ki2} & \cdots & \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m}}\sum_{i=1}^{n_k} {m_{kip}}^2
\end{pmatrix}
$$

$$
f(\boldsymbol{A})=\left(\frac{SS_{subpopulatoin}}{\sum_{k=1}^{m} SS_k}\right)=\frac{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}}
$$

$$
\frac{df(\boldsymbol{A})}{d\boldsymbol{A}}=0
$$

式 76: 中心化行列

$$
\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}
1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\
-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n}
\end{pmatrix}
$$

式 77: 多次元尺度構成法

$$
-\frac{1}{2}\boldsymbol{G_n}\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{G_n}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}
$$

$$
\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}
$$

式 78: イエンゼンの不等式

$$
f\big(Ex(\boldsymbol{x})\big)\geq Ex\big(f(x)\big)
$$

式 79：オーソマックス基準

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mp} \end{pmatrix}_{m \times p}$$

$$\mathrm{Q}_{or} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} {\lambda_{jk}}^4 - \frac{\omega}{m} \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{m} {\lambda_{jk}}^2 \right)^2$$

ω: 重み

式 80：オブリミン基準

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mp} \end{pmatrix}_{m \times p}$$

$$\mathrm{Q}_{ob} = \sum_{k<l=1}^{p} \left\{ \sum_{j=1}^{m} {\lambda_{jk}}^2 {\lambda_{jl}}^2 - \frac{\omega}{m} \left(\sum_{j=1}^{m} {\lambda_{jk}}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{m} {\lambda_{jl}}^2 \right) \right\}$$

ω: 重み

式 81 シグモイド関数

$$\varsigma_a(x) = \frac{1}{1+e^{-ax}}$$

式 82 標準シグモイド関数

$$\varsigma_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

式 83 点と平面の距離(1)

$$\frac{a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p}{\sqrt{\sum_{i=1}^{p} {a_i}^2}}$$

式 84 点と平面の距離(2)

$$\alpha = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{a} = (a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_p)$$

$$\boldsymbol{x} = (x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_p)$$

a_0は切片、$(a_1 \quad \cdots \quad a_p)$は単位法線ベクトル

x_0はダミー変数・$x_0 = 1$、$(x_1 \quad \cdots \quad x_p)$は変数ベクトル

式 85 ソフトマックス関数

$$S(y_i) = \frac{e^{y_i}}{\sum_{j=0}^{J-1} e^{y_j}}$$

式 86 二次形式のベクトルによる微分

$$\frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A} \, \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial \vec{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{A}) \, \vec{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}) \, \vec{\boldsymbol{x}}$$

式 87 二次形式のベクトルによる微分（対称行列の場合）

$$\frac{\partial \vec{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A}\, \vec{\boldsymbol{x}}}{\partial \vec{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{2A}\vec{\boldsymbol{x}}$$

式 88 行列式の行列による微分

$$\frac{d|\boldsymbol{A}|}{d\boldsymbol{A}} = |\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}})^{\boldsymbol{T}}$$

式 89 対数行列式の行列による微分

$$\frac{d\, log_e|\boldsymbol{A}|}{d\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}})^{\boldsymbol{T}}$$

式 90 対数行列式の行列による微分(対象行列の場合)

$$\frac{d\, log_e|\boldsymbol{A}|}{d\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}}$$

式 91 逆行列でつながった二次形式の行列による微分

$$\frac{d\vec{x}^T A^{-1}\vec{x}}{dA} = -(A^{-1})^T \vec{x}\vec{x}^T (A^{-1})^T$$

式 92 逆行列でつながった二次形式の行列による微分(対象行列の場合)

$$\frac{d\vec{x}^T A^{-1}\vec{x}}{dA} = -A^{-1}\vec{x}\vec{x}^T A^{-1}$$