１．モンティ・ホール問題とは

モンティ・ホールという司会者がやっているクイズ番組がありました。３つのドアがあって、その内一つのドアの向こうに景品がある。景品があるドアを当てるというものです。回答者が１つのドアを選択した後に、司会者のモンティが選ばれなかった２つのドアの一つを開けると、ハズレを意味するヤギが出てきた。この状態で、モンティは残っている１つのドアに選択を変えてよいと言います。最初の選択を変更したほうが良いか、変更しないほうが良いかという問題です。この問題についての読者の質問に対して、雑誌Paradeでコラムを担当していたマリリン・ボス・サヴァントは、「正解はドアを変更するである。なぜならば、ドアを変更した場合には、景品が当たる確率が２倍になるからだと答えます。これについて、数学者を含む様々な人々から反論が出ます。ドアを変えても確率は1/2であり、2/3にはならないというも主張です。最終的に彼女が正しいということになっていると思います。

２．数学的解説

直感的には納得いきにくいこの結論が、どうしてそうなるのかという説明はいろいろあります。

もっとも素直に説明すると、ドアをA,B,Cとします。最初にAが選択されたとします。この時点で、Aが正解である確率は1/3で、BまたはCが正解である確率は2/3です。司会者モンティは答えを知っていて、正解でないCを開けたのですが、BまたはCが正解である確率が2/3だったところで、Cがなくなったのだから、Bが正解である確率は2/3です。つまり、二人で分けていたものを、一人がいなくなって総取りになったのだから、もとの倍になるというわけです。

これはこれで納得できるのですが、この論争の本質、つまり、マリリンと反マリリン派の考え方の違いを明確にするため、わざわざ、ベイズ公式を使って、この問題を解きます。忘れているかもしれないので、ベイズの定理を書きます

　ある事(X)が起きた時に別のある事(Y)が起きることの確率$\mathrm{P}(X \cap Y)$は、ある事(X)がおこる確率$\mathrm{P}(X)$とある事(X)が起きたという条件のもとにある事(Y)が起こる$(Y|X)$ことの確率$\mathrm{P}(Y|X)$の積である。

$$\mathrm{P}(X \cap Y) = \mathrm{P}(Y|X)\,\mathrm{P}(X)$$

逆に

ある事(Y)が起きた時に別のある事(X)が起きることの確率$\mathrm{P}(Y \cap X)$は、ある事(Y)がおこる確率$\mathrm{P}(Y)$とある事(Y)が起きたという条件のもとにある事(X)が起こる$(X|Y)$ことの確率$\mathrm{P}(X|Y)$の積である

$$\mathrm{P}(Y \cap X) = \mathrm{P}(X|Y)\,\mathrm{P}(Y)$$

そこで

$$\mathrm{P}(X \cap Y) = \mathrm{P}(Y \cap X)$$

とすれば

$$\mathrm{P}(Y|X)\,\mathrm{P}(X) = \mathrm{P}(X|Y)\,\mathrm{P}(Y)$$

となる。というものです。

$$\mathrm{P}(Y|X) = \frac{\mathrm{P}(X|Y)\,\mathrm{P}(Y)}{\mathrm{P}(X)}$$

というベイズの公式が導かれます。
数学的にはそうかもしれないが、本当に、いつでも、

$$\mathrm{P}(X \cap Y) = \mathrm{P}(Y \cap X)$$

なのかと問われると、そうでもないようなこともありそうな気がしますが、そういう場合の話だと納得しておいてください。公式が何を言っているのか解説します。

$$\mathrm{P}(Y|X) = \frac{\mathrm{P}(X|Y)\,\mathrm{P}(Y)}{\mathrm{P}(X)} = \mathrm{P}(X|Y)\,\frac{\mathrm{P}(Y)}{\mathrm{P}(X)}$$

と書く方が分かりやすいかもしれません。
つまり、「Aさんが傘を持っているとき(X)に雨に降られる$(Y|X)$確率 $\mathrm{P}(Y|X)$は、雨が降っていたとき(Y)に、Aさんが傘を持っていた$(X|Y)$確率 $\mathrm{P}(X|Y)$に、傘を持っている確率$\mathrm{P}(X)$に対する雨が降る確率$\mathrm{P}(Y)$の比をかければ予想できる。」ということなのですが、実際には、必ずしもこれは成り立ちません。Aさんが慎重ならば、いつも天気予報を見ていて、雨が降る確率$\mathrm{P}(Y)$傘を持っている確率$\mathrm{P}(X)$には相関があるからです。天気予報など気にしない、気分で傘を持ったなかったり持ったりする人ならば、この公式は成り立ちます。事象Xと事象Yが独立していることが前提なのです。

初めにマリリンを批判した人たちが考えた「反マリリンモデル」の考えをベイズ的に表現します。
彼らは、ドアCが不正解であった時にAが正解である確率$\mathrm{P}(A|C^c)$を計算しています。
事前確率で、ドアCが不正解である確率は

$$P(C^c) = \frac{2}{3}$$

事前確率でAが正解である確率は

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

でした。
Aが正解であった時にCのドアが不正解（ハズレ）である確率は、正解は一つなのだから絶対に不正解で、

$$P(C^c|A) = 1$$

です。これらの関係はベイズの公式で

$$P(A|C^c) = \frac{P(C^c|A)P(A)}{P(C^c)}$$

ですから

$$P(A|C^c) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

これに対して「マリリンモデル」は、司会者モンティが受けている制約に着目します。モンティはどのドアでも開けられるわけではないのです。正解のドアを開けてしまえば、その瞬間にクイズ番組は崩壊します。今、目の前にしているのはCが開けられたという事実です。

そこで、Cが不正解である確率$P(C^c)$ではなくて、Cが開けられる事前確率$P(C_o)$を考えます。$P(C_o)$は、Aが正解でCが開けられる確率$P(C_o|A)$と、Aが不正解でCが開けられる確率$P(C_o|A^c)$の合計ですから、

$$P(C_o|A) = P(A) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(C_o|A^c) = P(A^c) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P(C_o) = P(C_o|A) + P(C_o|A^c) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

とまじめに計算してもよいのですが、モンティにしてみれば、不正解が２つしかないのだから、もともと、Cを開ける確率は$\frac{1}{2}$だったと考えてもよいでしょう。

求めたいのは、Cを開けたという事実を前にして、Aが正解である確率$P(A|C_o)$です。ベイズの公式では

$$P(A|C_o) = \frac{P(C_o|A)P(A)}{P(C_o)}$$

となります。

$P(C_o|A)$はAが正解だった時に、Cを開く確率だから

$$P(C_o|A) = \frac{1}{2}$$

です。$P(A)$はCを開く前にAになる事前確率だから

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

です。

$$P(A|C_o) = \frac{P(C_o|A)P(A)}{P(C_o)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

となります。

余事象であるBが正解である確率は

$$P(B|C_o) = 1 - (A|C_o) = \frac{2}{3}$$

です。

どこが違うのかというと、

反マリリンモデル

$$P(A|C^c) = \frac{P(C^c|A)P(A)}{P(C^c)}$$

マリリンモデル

$$P(A|C_o) = \frac{P(C_o|A)P(A)}{P(C_o)}$$

赤字のところが違っています。違う問題を解いているのです。

3. この問題から何を考えたか

ポイントは、クイズ番組を成立させるための司会者モンティが受けている制約です。マリリンを批判したい人の中には、大学教授など数学の専門家も少なからずいました。数学の専門家でも、クイズ番組の司会者がどんな制約下で仕事をしているのかを考えなければ見当はずれな問題を解いてしまうのです。つまり、数学の能力よりも、どういう状況で何がなされているのかを考える広い視野と常識・経験が必要ということです。ところで、私は実際の問題として、マリリンが本当に正解したかどうかは疑わしいと思っています。モンティは初めから、第一回目の選択の後に不正解の一つを明らかにする、と言っていたのでしょうか。もし、初めからそのように言っていなくて、初めの選択の後にこれを言い出したのだとすれば、選択を変更させたかったに違いありません。悪意でこれをやるとすれば、最初の選択が正解だったからです。私ならば裏読みをして変更しません。もっともこれは、戦略の問題であって数学の問題ではありません。ただこれだけ言っておきたい。世界最高のIQの持ち主といってもこの程度なのです。数学だけで現実の問題が解決できるわけではありません。

　言いたいのは、数学の話ではなくて、マスコミの話です。司会者モンティは、単純に正解がでるのでは面白くないから、C のドアを開けたのです。私に言わせれば、それは余計な事です。本当の勝負師はこういうことをしない。真剣勝負とはそういうもので、無意識に表れ

る情報を相手に与えようとはしない。この場合、正解者がすべきことはモンティを観察することなのです。テレビをふくめたマスコミはこういうことをする。そうせざるを得ない感性を持っている。黙っていられない。真剣勝負が見たい私としては、これは余計なノイズです。真剣勝負ではないプロレス中継出身のアナウンサーはこれをやらなければ飯が食えない。新聞は、ゆがんだおかしな角度から報道して、ない問題もあるよう報道しなければならない。これはもう彼らの感性でしょう。だとすれば、彼らが平気でウソを書くのもやむを得ないかもしれない。ウソになるか、角度の違った問題の取り上げ方にとどまるかは、その人間の才能によるのだが、微妙だろう。本田勝一のように、明らかなデマを書いても、それを取り消さず、報道とはそういうものだと開き直るのも、確かに「それがそういうものならばそうだ。」。

モンティ・ホール問題は、思わぬ論争を起こした。論争自体なかなか面白かったし、悪意があったわけではない。罪がない。残酷な人殺しの話も、それを楽しむ変態もいるだろう。実害がなければ変態だって楽しむ権利はある。そういうものだから、本田を攻撃しても仕方がない。こういう話になると、報道の自由がどうしたとか、マスコミの正義とかいう話になるのだが、だが、おそらくそれは問題の本質ではない。何かしたくなるというマスコミ人が持っている癖が問題なのだ。実害のないところでそれが行われているのならば、別にそれでよい。楽しめる人が楽しめばよい。問題は、それに「正義感」が絡むことである。こういう癖の問題を「正義」でくるんで正当化してはいけない。本田が「ワシそういうの書いてみたかったんだもんね。」といえばそれだけのことである。偉そうにしなければ許してやる。ただ馬鹿にはする。しかし、朝日新聞でカンボジアのポルポト軍について「アジア的や優しさにあふれている。」と報道しき、「クメールの微笑」を書いた和田俊は死んだいまでも許されまい。当時、リアルにカンボジア情勢は動いており、多くの人が死に実害があった。ネットを検索していたら、岩垂弘（元朝日新聞記者）が和田について書いていた。まれにみる「知性」で、精神の貴族を目指した人だそうだ。日本の知識人の大衆化を嘆いていたらしい。馬鹿もいい加減にしたほうが良い。こんなもんが知性のわけがないだろう。正義でもない。彼らは若いころ、新聞記者同士で酒を飲みながら思想や文化を語り合ったそうだ。精神のダンディズムを主張することも勝手だ。ただそんなものは彼らの趣味に過ぎない。私も酒好きだが酒が好きなだけだ。議論して偉そうにするな。酒を愛せ。ダンディズムなど気取るな。和田はカンボジアに行かずに記事を書いたことが批判されている。そのこと自体は非難に値しない。カンボジアに行かなくたって分析的に記事はかける。問題は分析力が全くないことだ。彼は晩年、大学で教鞭をとっていたらしい。こんな分析力のない人間にものを教わりたくない。大学人だからといって信用してはいけない。

モンティホール問題について解説してくれと言われて、解説を書いているうちに、問題は数学ではなくて、テレビのクイズ番組という制約にあるのだと気付いた。マスコミ人の多くは、この制約が嫌いではなくて気に入っている。だからその世界に入った。いわゆる

文化人も似たようなものだ。だとすれば、クイズ番組以外にもマスコミ的な議論の底流にそれがあるのだろう。そうした好みは、正義や知性とは全く関係がないのだと、多くの「大衆」は気付いていると思う。

(2017)