

20230526 雑談会用のメモ

5月26日は、統計の講義をしません。手の空いている人が集まって雑談をします。目的は、今まで2回の講義の内容を確認することです。他に用事のある人は参加する必要はありません。話の内容は、後にブログで紹介します。会話を豊かなものにするために、各人が材料を持っていた方が良いでしょうので、課題を出しておきます。

課題1. 二項分布を利用して何かを論じてください。

事実に基づく必要はありません。作り話に乗っかって構いません。こんなことがしたいけれど、具体的のどうするかという話題提供でも構いません。課題の解答例を示しておきます。

課題2. ポアソン分布を利用して何かを論じてください。

事実に基づく必要はありません。作り話に乗っかって構いません。こんなことがしたいけれど、具体的のどうするかという話題提供でも構いません。課題の解答例を示しておきます。

課題3. Gosset が何をしたかったのかを考える。何かの差を確率論的に論ずるだけなら、 χ^2 分布があれば十分なような気がする。何故、t分布が必要なのかを考える。

課題4. 分散の比の確率分布 F 分布で何が出来るか、何がしたいかを考える。分散の比の確率論が必要なのはどんな場面か。

解答例

課題1 (二項分布を使った議論) の解答例—壺ふりをたった切るとき

博打にイカサマは付き物で、多分どんな賭博でも何らかの操作が行われている。狙った目にかなりの確率で入れられるルーレットのディーラーがいるのだと聞いたことがある。丁半博打の壺ふりだって、壺の中の目を操作できかもしれない。しかし、それも程度問題で、あまりひどいイカサマは、渡世人の仁義としても正さなければならない。しかしその見極めが難しい。そこで、2項分布的にこの問題を論ずる。

丁半博打では、勝ち負けの確率は二分の1ずつのはずである、ここで、5回連続勝負に負ける確率は、

$$B(k/n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

ですが、この場合は $p = \frac{1}{2}$ だから、

$$B\left(k/n, \frac{1}{2}\right) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

そこで、5回続けて勝負にまける確率を考えると

$$B\left(0/5, \frac{1}{2}\right) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 \times 0.03125 = 0.03125$$

であり、確率5%でしか起こらない。しかし、イカサマ側も考えていて、1回ぐらいは勝たせるから、

$$B\left(1/5, \frac{1}{2}\right) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \times 0.03125 = 0.15625$$

となって、まあそういうこともあるなと納得させられます。ここは自重して博打を続け

ます、次も5回の内1回は勝たせますから

$$B\left(2/10, \frac{1}{2}\right) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 45 \times 0.0009765625 = 0.0439453125$$

となりますが、この確率は5%以下です、20回に一回しか起こらないことが起きている

のです。「ヤロー、イカサマだー」と叫んで、壺ふりをたたっ切ります。

課題2(ポアソン分布の活用)の解答例－浜名湖毒アサリ事件

貝の毒化現象とは、サキシトキシン、ゴニオトキシンなど渦鞭毛走藻や淡水の藍藻などによってつくられる原因物質が、食物連鎖によって、カキ、アサリなどに蓄積されて、それらの貝を食べた人に神経麻痺（麻痺性貝毒）、下痢（下痢性貝毒）などを発症させる現象です。浜名湖毒アサリ事件は、第二次世界大戦中から戦後にかけて、浜名湖周辺で発生した貝毒事件で、東京大学医学部の秋葉浅一郎によれば、静岡県浜名郡新居町で1942年3月20日ごろから発生したとされ、この年は4月4日に終焉しています。浜松保健所で行われたマウス試験によって、その原因が浜名湖産のアサリを食べたことであることが特定されていますが、原因物質は特定されていません（当時の技術では、原因物質までは突き止められなかったのでしょう）。この年、334名が入院し、144名が死んでいます。当時のこの地域の住民の数10552名です。春先のまだ水温の冷たい時期で、春の産卵期を控えたこの時期の浜名湖のアサリは身が充実していておいしく、潮干狩りで簡単に手に入るので、どこの家庭でもシーズン中に一度は食べると言っても良いくらいです。特に食糧不足の戦争中や戦後は大量のアサリを食べたようです。少なくとも、地域の10%ぐらいの人がその期間内に浜名湖のアサリを食べると思います。これは浜名港の水産実験所で合計11年くらい働いた私の実感でもあります。つまり、アサリを食べた人の中で、中毒した人の割合は32%ぐらいが中毒したのだと思います。

そこで、中毒した人はどのくらいの量のアサリを食べたのかを考えてみます。おそらく、すべての貝が一樣の濃度で汚染されるのではないでしょう。そこで、次のような仮定で計算してみます。地域のアサリすべてが一樣に汚染されるのではなく、汚染されたアサリと汚染されないアサリがあり（放射能でも何でも、海の汚染の場合、横軸に汚染度の低い方からの順番として、縦軸に汚染濃度をとると、何処かで急激に立ち上がる形になることが多い。）。1個でも毒化したアサリを食べたら発症することにします。どのくらいの数のアサリを食べたか今のところわからないのですが、毒化したアサリの割合は小さいだろうと考えて、ポアソン分布的なるだろうと予想して、期待値(λ)を外から与えて、毒アサリを1以上食べる確率を計算します。ポアソン分布の確率は下記の式で計算しました。

$$P(k/\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

毒アサリを1個以上食べる確率(p)は

$$p = 1 - P(0/\lambda)$$

$\lambda = 0.1$ の時

$$0.1^0 = 1, 0! = 1, e^{-0.1} = 0.905$$

$$1 - \frac{0.1^0}{0!} e^{-0.1} = 0.095$$

$\lambda = 0.2$ の時

$$0.2^0 = 1, 0! = 1, e^{-0.2} = 0.819$$

$$1 - \frac{0.2^0}{0!} e^{-0.2} = 0.181$$

$\lambda = 0.3$ の時

$$0.3^0 = 1, 0! = 1, e^{-0.3} = 0.741$$

$$1 - \frac{0.3^0}{0!} e^{-0.3} = 0.259$$

$\lambda = 0.4$ の時

$$0.4^0 = 1, 0! = 1, e^{-0.4} = 0.670$$

$$1 - \frac{0.4^0}{0!} e^{-0.4} = 0.330$$

整理すると、

| λ | p |
|-----------|-------|
| 0.1 | 0.095 |
| 0.2 | 0.181 |
| 0.3 | 0.259 |
| 0.4 | 0.330 |

となります。つまり、期待値0.4ぐらいで、実際に観測された発症率になります。ちなみに、

秋葉浅一郎は、あさり 10 個から 15 個は安全量、40 個から 60 個が中毒量と結論しています。秋葉がどのような情報と分析によって、安全量と中毒量を推定したのか知りませんが（秋葉の報告（秋葉朝一郎「アサリとカキの中毒とその毒性物質の研究」『日新醫學』第 36 号、南江堂、1949 年 3 月、pp. 231-244。）を読んでいません。）、恐らくこの量は、一般住民や発症者の家族のヒヤリングから得た、実際に調査対象が実際に食べたアサリの数なのでしょう。40 個食べた時の期待値が 0.4 ということは、汚染されたアサリの割合が、1%ということです。ところで、厚生省の（[自然毒のリスクプロファイル：二枚貝：麻痺性貝毒 | 厚生労働省 \(mhlw.go.jp\)](http://www.mhlw.go.jp)）によれば、麻痺性貝毒の致死量は、サキシトキシン換算で 2mg です。2mg の 1 個体あたりの蓄積量はちょっと大きすぎる値のような気がします。仮に、1 個体あたりの蓄積量が 0.5mg だとすると、4 個体食べないと中毒量に達しません。4 個体までは中毒量に達しないと考えて、期待値を操作すると、

$\lambda = 3.8$ の時に

$$1 - (P(0/3.8) + P(1/3.8) + P(2/3.8) + P(3/3.8) + P(4/3.8)) = 0.332$$

になります。実際の発症率に近い値になります。

$$\frac{3.8}{40} = 0.095$$

ほぼ、1割のアサリが毒化していたというのは、有りそうの数字のような気がします。貝毒の分析をしたことがないので、実際の毒物の蓄積量がどのくらいの数値なのか知りません。ですから、この分析は、いい加減なものです。貝毒の専門家を何人か知っているのですが、ついでの時に、この仮定と議論の進め方にリアリティーがあるかどうか訊いておきます。1%から 10%のアサリが汚染されれば、これだけ大きな貝毒事件になるというのは、有りそうな話だと思います。