線形代数学とは何か

行列とは何か？」を、Wikipedia で引くと、「数字、記号、数式などを、縦横、矩形に並べたたもの」と出てきます。そんなことはわかっています。訊きたいことはそういうことではないでしょう。何で、矩形に並べるのか、矩形に並べるとどんな良いことがあるのか、それを使って何をしようとしているのか、訊きたいのはそういうことでしょう。でも、それを問いただすと、行列にはベクトル的な見方もあるし、時にはただの数字の羅列に過ぎない時もあるし、いろ色な意味があるから、一言では言えないという答えが返ってきます。世の中には、様々なところに行列の形式で書かれたものがあるし、行列を使った演算も様々なところに使われるので、それが何かと問われると、うまく答えられないのでしょう。だから、どうしてもボけた答えになってしまうのです。多分、具体的な例をあげて考えた方が良いのでしょう。

1.ベクトルとしての行列

例えば、表 1 のような、テストの結果を示した成績表のようなものも行列の例です。

表 1． 行列の例（成績表）

	名前			
教科	太郎	次郎	三郎	四郎
国語	70	40	30	75
英語	50	60	20	60
数学	40	70	60	80
理科	80	90	90	90
社会	65	50	40	35

また、表 1 の行と列を入れ替えた行列も作ることが出来ます。この方が一般的でしょう。

表 2. 表 1 の表の行と列を入れ替えた成績表

	教科				
名前	国語	英語	数学	理科	社会
太郎	70	50	40	80	65
次郎	40	60	70	90	50
三郎	30	20	60	90	40
四郎	75	60	80	90	35

このように、行列の行と列を入れ替えた行列を転置行列といいます。転置行列を示す記号の書き方は様々ですが、肩付き文字で T と表すやり方（A^T） が多いと思います。（ ${}^tA$ と書く方が多いかもしれないが、こちらは、Word の数式の書き方がサポートしていない。)

成績表の行列を A とすると

$$A=\begin{pmatrix}70 & 40 & 30 & 75\\ 50 & 60 & 20 & 60\\ 40 & 70 & 60 & 80\\ 80 & 90 & 90 & 90\\ 65 & 50 & 40 & 35\end{pmatrix}$$

転置行列は

$$A^T=\begin{pmatrix}70 & 40 & 30 & 75\\ 50 & 60 & 20 & 60\\ 40 & 70 & 60 & 80\\ 80 & 90 & 90 & 90\\ 65 & 50 & 40 & 35\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}70 & 50 & 40 & 80 & 65\\ 40 & 60 & 70 & 90 & 50\\ 30 & 20 & 60 & 90 & 40\\ 75 & 60 & 80 & 90 & 35\end{pmatrix}$$

となります、行列には様々な捉え方が出来て、例えば、行列 A を横ベクトルを、縦に並べたものというイメージでとらえる人もいます。つまり

ベクトル国語:$(70 \quad 40 \quad 30 \quad 75)$

ベクトル英語:$(50 \quad 60 \quad 20 \quad 60)$

ベクトル数学: $(40 \quad 70 \quad 60 \quad 80)$

ベクトル理科: $(80 \quad 90 \quad 90 \quad 90)$

ベクトル社会: $(65 \quad 50 \quad 40 \quad 35)$

の横ベクトルを縦に並べたという感じです。そうすると、転置ベクトルの方は、

$$国語:\begin{pmatrix}70\\40\\30\\75\end{pmatrix},\ 英語:\begin{pmatrix}50\\60\\20\\60\end{pmatrix},数学:\begin{pmatrix}40\\70\\60\\80\end{pmatrix},理科\begin{pmatrix}80\\90\\90\\90\end{pmatrix},社会\begin{pmatrix}65\\50\\40\\35\end{pmatrix}$$

のように、それぞれのベクトルを転置して、縦ベクトルにして、それらを横に並べたものになります。

ここ、突然ですが、行列の掛け算というのを定義します。行列同士の足し算、引き算、掛け算というのがあって、行列同士も四則演算できるのですが、割り算はありません。その代わり、逆行列というのがあって、これを左から掛けるというのが、割り算にあたります。丁度、普通の演算で、割り算をすることと、逆数を掛けることが同じ結果になることに相当します。とにかくここで、行列の掛け算をしますので、行列の掛け算のルールを説明します。「左側からかける行列の i 行目の k 列目の因子と右側からかける行列の j 列目の k 行目の因子を掛け合わせる合わせ、これを k=1 から n まで合計したものが、掛け合わせた行列の i 行 j 列目の因子となる。」というのがルールです。

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & a_{2j} & & a_{2n} \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{i1} & & & a_{ij} & & a_{in} \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} & & b_{2j} & & b_{2n} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots \\
b_{i1} & & & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots \\
b_{n1} & b_{2n} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{11}b_{11} + \cdots a_{1k}b_{k1} \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots a_{1k}b_{kn} \ldots a_{1n}b_{nn} \\
\vdots & a_{i1}b_{1j} + \cdots a_{ik}b_{kj} \cdots + a_{in}b_{nj} & \vdots \\
a_{n1}b_{11} + \cdots a_{nk}b_{k1} \cdots + a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + \cdots a_{nk}b_{kn} \cdots + a_{nn}b_{nn}
\end{pmatrix}
$$

ちょっと面倒さそうですが、すぐになれます。今回の講義で重要なのは、行列の掛け算を公式的に覚えることではありません。このルールを適用して、横ベクトルを縦に並べた行列にその転置行列（縦ベクトルを横に並べた行列）を掛けるとどうなるのかという話を、行列演算の実例として示したかったからです。

成績表ので示した行列の例を、もう少し抽象化して、行列$\boldsymbol{\Sigma}$とします。この$\boldsymbol{\Sigma}$を次のように、横ベクトルを縦に並べたものだとします。

$$
\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{A}} \\ \vec{\boldsymbol{B}} \\ \vec{\boldsymbol{C}} \\ \vec{\boldsymbol{D}} \\ \vec{\boldsymbol{E}} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix}
(a_1 & a_2 & a_3 & a_4) \\
(b_1 & b_2 & b_3 & b_4) \\
(c_1 & c_2 & c_3 & c_4) \\
(d_1 & d_2 & d_3 & d_4) \\
(e_1 & e_2 & e_3 & e_4)
\end{pmatrix}
= \begin{pmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\
d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\
e_1 & e_2 & e_3 & e_4
\end{pmatrix}
$$

$$\vec{\boldsymbol{A}} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4)$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4)$$

$$\vec{\boldsymbol{C}} = (c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4)$$

$$\vec{\boldsymbol{D}} = (d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4)$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = (e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4)$$

その転置行列は

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\boldsymbol{T}} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{T}}}\right)$$

$$
= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \right)
= \begin{pmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\
a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\
a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4
\end{pmatrix}
$$

$$
\overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{T}}} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}
$$

これらを使って、行列$\boldsymbol{\Sigma}$にその転置行列$\boldsymbol{\Sigma}^{\boldsymbol{T}}$を掛けます。

$$
\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{A}} \\ \vec{\boldsymbol{B}} \\ \vec{\boldsymbol{C}} \\ \vec{\boldsymbol{D}} \\ \vec{\boldsymbol{E}} \end{pmatrix} \left(\overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{T}}}\right) = \begin{pmatrix}
\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{T}}} \\
\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{T}}} \\
\vec{\boldsymbol{C}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{C}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{C}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{C}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{C}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{T}}} \\
\vec{\boldsymbol{D}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{D}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{D}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{D}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{D}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{T}}} \\
\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}} & \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{T}}}
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{A^T}} & \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{B^T}} & \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{C^T}} & \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{D^T}} & \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{E^T}} \\
\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{A^T}} & \vec{\boldsymbol{B}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{B^T}} & \vec{\boldsymbol{B}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{C^T}} & \vec{\boldsymbol{B}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{D^T}} & \vec{\boldsymbol{B}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{E^T}} \\
\vec{\boldsymbol{C}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{A^T}} & \vec{\boldsymbol{C}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{B^T}} & \vec{\boldsymbol{C}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{C^T}} & \vec{\boldsymbol{C}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{D^T}} & \vec{\boldsymbol{C}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{E^T}} \\
\vec{\boldsymbol{D}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{A^T}} & \vec{\boldsymbol{D}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{B^T}} & \vec{\boldsymbol{D}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{C^T}} & \vec{\boldsymbol{D}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{D^T}} & \vec{\boldsymbol{D}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{E^T}} \\
\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{A^T}} & \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{B^T}} & \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{C^T}} & \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{D^T}} & \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{E^T}}
\end{pmatrix}
$$

ところで

$$
\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{A^T}} = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2 = \sum_{i=1}^{4} {a_i}^2 = SS_A
$$

$$
\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{B^T}} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = \sum_{i=1}^{4} a_ib_i = SS_{AB}
$$

だから、$\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{A^T}}$は A の成分の平方和で$SS_A$、異なるベクトル同士の内積になっていてる、

$\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{B^T}}$などは$SS_{AB}$となっています。

$$
\boldsymbol{\Sigma\Sigma^T} = \begin{pmatrix}
SS_A & SS_{AB} & SS_{AC} & SS_{AD} & SS_{AE} \\
SS_{BA} & SS_B & SS_{BC} & SS_{BD} & SS_{BE} \\
SS_{CA} & SS_{CB} & SS_C & SS_{CD} & SS_{CE} \\
SS_{DA} & SS_{DB} & SS_{DC} & SS_D & SS_{DE} \\
SS_{EA} & SS_{EB} & SS_{EC} & SS_{ED} & SS_E
\end{pmatrix}
$$

つまり、対角成分がすべて平方和で、そうでないところは、縦横のベクトルによる$SS_{縦・横}$のようになっているのです。これらを自由度で割れば、分散と共分散になりますが、皆同じ自由度なので、このまま、これを分散共分散行列と呼びます。SS_{AB}=SS_{BA}ですから、対角線上の平方和になってるところを中心として、右上の成分と左下の成分は、鏡像関係になっています。こういう行列を対角行列と言います。対角行列は使いやすい特性が様々あるので覚えておいてください。その一つが対角化が出来るということです。対角化というのは、ある行列$\boldsymbol{\Sigma}$の左右から対角化行列$\boldsymbol{P}$とその逆行列$\boldsymbol{P^{-1}}$を掛けて、

$$
\boldsymbol{P\Sigma P^{-1}} = \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \lambda_n
\end{pmatrix}
$$

のように対角成分以外を 0 にすることです。分散共分散分析は、横ベクトルを縦に並べた行列と、その転置行列を掛け合わせたものですから、対角化行列を掛けたことによって、元のベクトルが、直交したことになります。つまり、直交化行列は、元の元のベクトルを直交化したベクトルに写像として移すときの変換倍率なのです。主成分分析とは、この対角化のことです。主成分分析の話をすることが今回の講義の目的ではないので、この話はここでやめておきますが、行列をベクトルを並べたものだと解釈することで何が出来るのかわかった来たと思います。それはそれとして、この段階でも、分散・共分散行列を作る

ことの統計学的な意味を説明することは可能です。
もっとも単純な、分散共分散行列の利用法は、これをもとに相関行列を作ることです。図 1 に示したように。異なるベクトルの相関係数は、その SS の行と列で、平方和を探して、その平方和の平方根の積で、SS を割れば簡単に求まります。

$$r_{AC} = \frac{SS_{AC}}{\sqrt{SS_A}\sqrt{SS_C}}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^T = \begin{pmatrix} SS_A & SS_{AB} & SS_{AC} & SS_{AD} & SS_{AE} \\ SS_{BA} & SS_B & SS_{BC} & SS_{BD} & SS_{BE} \\ SS_{CA} & SS_{CB} & SS_C & SS_{CD} & SS_{CE} \\ SS_{DA} & SS_{DB} & SS_{DC} & SS_D & SS_{DE} \\ SS_{EA} & SS_{EB} & SS_{EC} & SS_{ED} & SS_E \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & r_{AB} & r_{AC} & r_{AD} & r_{AE} \\ r_{BA} & 1 & r_{BC} & r_{BD} & r_{BE} \\ r_{CA} & r_{CB} & 1 & r_{CD} & r_{CE} \\ r_{DA} & r_{DB} & r_{DC} & r_D & r_{DE} \\ r_{EA} & r_{EB} & r_{EC} & r_{ED} & r_E \end{pmatrix}$$

データの相関を把握しておくことは、統計解析の基本です。また、それだけでも重要な発見につながることもあります。これだけ見ても、線形代数学を使った、多変量解析の有効性が理解できるでしょう。

2.算術としての行列式

行列には様々な意味がりますが、江戸時代の算術などでは、連立方程式の解法として認識されたいたのではないかと思います。後に、様々な解釈や意味付けが生まれてきますが、初めからそれを考えると、かえってわかりにくいと思います。ということで、とりあえず、算術としての行列について解説します。

最も単純な例から考えたいので下の連立方程式を考えます。

$$ax + by = \alpha$$

$$kx + ly = \beta$$

これを　行列で表すと

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ kx + ly \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

と表せます。この左辺を２つの行列の積として表すと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

となります。行列の掛け算のルールを使って、連立方程式を簡潔な表すことが出来るぐらいの気楽な気持ちでいてください。

このやり方だと、たとえば

$$ax + by + cz = \alpha$$

$$kx + ly + mz = \beta$$

$$sx + ty + uz = \gamma$$

は

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

となります。案外便利でしょう。

ここで、

$$ax + by = \alpha$$

$$kx + ly = \beta$$

にもどって、この連立方程式を解いてみます。

$$akx + bky = k\alpha$$

$$akx + aly = a\beta$$

$$(bk - al)y = k\alpha - a\beta$$

$$y = \frac{k\alpha - a\beta}{-(al - bk)}$$

これを

$$ax + by = \alpha$$

に代入

$$ax + b\frac{k\alpha - a\beta}{-(al - bk)} = \alpha$$

$$ax = \alpha + b\frac{k\alpha - a\beta}{al - bk}$$

$$ax = \frac{al\alpha - bk\alpha + bk\alpha - ab\beta}{al - bk}$$

$$ax = \frac{al\alpha - ab\beta}{al - bk}$$

$$x = \frac{l\alpha - b\beta}{al - bk}$$

となって答えは

$$x = \frac{l\alpha - b\beta}{al - bk}$$

$$y = \frac{-(k\alpha - a\beta)}{al - bk}$$

ここで突然ですが、この二つの式の右辺の分母は、行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}$$

の行列式です。行列式とは行列の大きさを表す値です。数式としては次のように表します。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}$$

行列式が一体何の大きさなのかは後で説明します。具体的な計算式は、次の通りです。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} = al - bk$$

行列式を使って答えを書くと

$$x = \frac{l\alpha - b\beta}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{-(k\alpha - a\beta)}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}}$$

ここに挙げたのは、二元の連立方程式の例です。三元になれば、

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

となって、

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix} = alu + bms + ckt - amt - bku - cls$$

と計算します。これは３ｘ３の行列式です。一般にｎ×ｎの行列式の計算の仕方を知りたいところですが、それは単なる計算法に過ぎないから、計算方法についてはあとで触れることにします。大切なのは、行列の計算がどんな考え方にもとづいているのか、どんなことを表しているのかを感覚的につかむことです。

１元の方程式を考えてみましょう。

$$ax = \alpha$$

のように表し、

$$x = \frac{\alpha}{a}$$

と計算します。

同じようにｎ元１次の連立方程式を

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\alpha}$$

のように簡潔に書き表したいのです。

先ほどの３元の連立方程式の場合は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

として

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$$

ということです。こうしておけば、3 元 1 次の連立方程式を簡単に一行で書き表せます。記法が簡便になったのだから、計算もこの形のまま簡便にやることを考えたくなります。
１元の方程式の時は

$$ax=\alpha$$

$$x=\frac{\alpha}{a}$$

xの係数aで右辺を割って答えを出しました。これを別の言い方に変えると、両辺にaの逆数a^{-1}を掛けたということになります。
計算としては次の通りです。

$$ax=\alpha$$

$$a^{-1}ax=a^{-1}\alpha$$

$$1\cdot x=a^{-1}\alpha$$

$$x=\frac{\alpha}{a}$$

と計算しています。つまり

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

の逆数に相当するものを考えて、それを両辺にかけて、左辺の係数が 1 のような何かの単位のようなものになれば良いわけです。つまり、やらなければいけないことは、１．行列の掛け算のやり方を決める。2. 逆数に相当するものを考える。3. 単位のようなものを考える。以上の 3 つです。逆数に相当するものを逆行列、単位に相当するものを単位行列という名前を付けておきましょう。
複雑なものは考えにくいので。最も単純な２元連立方程式の例について考えます。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

答えは

$$x=\frac{l\alpha-b\beta}{al-bk}$$

$$y=\frac{-(k\alpha-a\beta)}{al-bk}$$

です。逆行列をA^{-1}として、どんな計算をしたいのかというと、

$$ans=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$ans = \begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

という計算をして、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ans = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

と計算したいのです。我々は答えを知っていて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{l\alpha - b\beta}{al - bk} \\ \dfrac{-(k\alpha - a\beta)}{al - bk} \end{pmatrix}$$

行列の四則演算のルールを説明していませんが、行列のスカラー倍は行列の各要素をスカラー倍したもので、行列をスカラーで割ったものは、各要素をスカラー分の１にしたものです。右辺の分母は行列式だからこれを外に取り出すと

$$= \frac{1}{\begin{bmatrix} a & b \\ k & l \end{bmatrix}} \begin{pmatrix} l\alpha - b\beta \\ -(k\alpha - a\beta) \end{pmatrix}$$

この分子は、$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$に左から何かの行列を掛けたものだから、とりあえず、αβを取り除いて、分子について各辺をバラバラに書いてみると

$$\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}$$

となります。
ここで、行列の掛け算のルールを思い出すと、

$$\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\alpha - b\beta \\ -k\alpha + a\beta \end{pmatrix}$$

ですから、

$$x = \frac{l\alpha - b\beta}{al - bk}$$

$$y = \frac{-(k\alpha - a\beta)}{al - bk}$$

という、計算結果は、

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

という、計算をしたことになります。この結果から、

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}$$

だという予想が出来ます。そこで、実際に、$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}}$を$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}$にかけてみます。

$$\frac{\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}$$

分子部分だけを取り出します。

$$\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} al - bk & bl - bl \\ -ak + ak & -bk + al \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} al - bk & 0 \\ 0 & al - bk \end{pmatrix}$$

$$= (al - bk) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ですから

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{al - bk}{al - bk} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ためしに、これを$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$にかけてみます

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり、確かにかけても行列に変化はありません。ということは、私たちが求めていた逆行列は、

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}$$

単位の様なものは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（ちなみにこれは２次の単位行列という名前です。）

何となくわかりかけてきたと思いますが、残っている問題は、$\begin{pmatrix} l & -b \\ -k & a \end{pmatrix}$が何かということです。それを論ずる前に、念のため３元の連立方程式について考えます。

$$ax + by + cz = \alpha \qquad ①$$

$$kx + ly + mz = \beta \qquad ②$$

$$sx + ty + uz = \gamma \qquad ③$$

という連立方程式を、以下のような、行列形式で書いて

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

両式に左から逆行列を掛けて、

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

という手順で解きたいという話です。そうかといって、我々は逆行列など知りませんから、中学生の時にならった、連立方程式の解法を使って、

①÷a　$x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}z = \frac{\alpha}{a}$　①’

②÷k　$x + \frac{l}{k}y + \frac{m}{k}z = \frac{\beta}{k}$　②’

③÷s　$x + \frac{t}{s}y + \frac{u}{s}z = \frac{\gamma}{s}$　③’

①’−②′　$\left(\frac{b}{a} - \frac{l}{k}\right)y + \left(\frac{c}{a} - \frac{m}{k}\right)z = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{k}$　④

①’−③′　$\left(\frac{b}{a} - \frac{t}{s}\right)y + \left(\frac{c}{a} - \frac{u}{s}\right)z = \frac{\alpha}{a} - \frac{\gamma}{s}$　⑤

$$\left(\frac{bk-al}{ak}\right)y + \left(\frac{ck-am}{ak}\right)z = \frac{k\alpha-a}{ak} \qquad ④’$$

$$\left(\frac{bs}{as}\right)y + \left(\frac{cs-a}{as}\right)z = \frac{s\alpha-a\gamma}{as} \qquad ⑤’$$

$$y + \left(\frac{ck-a}{bk}\right)z = \frac{k\alpha-a\beta}{bk-a} \qquad ④”$$

$$y + \left(\frac{cs-au}{bs-at}\right)z = \frac{s\alpha-a\gamma}{bs-at} \qquad ⑤”$$

④'' − ⑤'' $\left(\frac{ck-am}{bk-al}-\frac{cs-au}{bs-at}\right)z=\frac{k\alpha-a\beta}{bk-al}-\frac{s\alpha-a\gamma}{bs-at}$ ⑥

$\{(ck-am)(bs-at)-(cs-au)(bk-al)\}z=(k\alpha-a\beta)(bs-at)-(s\alpha-a\gamma)(bk-al)$
⑥'

$$(\cancel{bcks}-abms-ackt+a^2mt-\cancel{bcks}+abku+acls-a^2ul)z$$
$$=\cancel{bks\alpha}-abs\beta-akt\alpha+a^2t\beta-\cancel{bks\alpha}+abk\gamma+als\alpha-a^2l\gamma$$

$$a(-alu-bms-ckt+amt+bku+cls)z=a\{-(kt-ls)\alpha+(at-bs)\beta-(al-bk)\gamma\}$$
$$-a(alu+bms+ckt-amt-bku-cls)z=-a\{(kt-ls)\alpha-(at-bs)\beta+(al-bk)\gamma\}$$
$$(alu+bms+ckt-amt-bku-cls)z=(kt-ls)\alpha-(at-bs)\beta+(al-bk)\gamma$$
$$z=\frac{(kt-ls)\alpha-(at-bs)\beta+(al-bk)\gamma}{alu+bms+ckt-amt-bku-cls}$$

$$y=\frac{k\alpha-a\beta}{bk-al}-\left(\frac{ck-am}{bk-al}\right)z \qquad ④'''$$

$$y=\frac{1}{bk-al}\{(k\alpha-a\beta)-(ck-am)z\}$$

$$=\frac{1}{bk-al}\left\{\frac{(k\alpha-a\beta)(alu+bms+ckt-amt-bku-cls)-(ck-am)((kt-ls)\alpha-(at-bs)\beta+(al-bk)\gamma)}{alu+bms+ckt-amt-bku-cls}\right\}$$

分子について

$$aklu\alpha+bkms\alpha+\cancel{ck^2t\alpha}-\cancel{akmt\alpha}-bk^2u\alpha-\cancel{ckls\alpha}-a^2lu\beta-\cancel{abms\beta}-\cancel{ackt\beta}+\cancel{a^2mt\beta}$$
$$+abku\beta+acls\beta-\cancel{ck^2t\alpha}+\cancel{akmt\alpha}+\cancel{ckls\alpha}-alms\alpha+\cancel{ackt\beta}-\cancel{a^2mt\beta}$$
$$-bcks\beta+\cancel{abms\beta}-(ck-am)(al-bk)\gamma$$
$$=al(ku-ms)\alpha-bk(ku-ms)\alpha-al(au-cs)\beta+bk(au-cs)\beta+(al-bk)(am-ck)\gamma$$
$$=(al-bk)(ku-ms)\alpha-(al-bk)(au-cs)\beta+(al-bk)(am-ck)\gamma$$
$$(al-bk)\{(ku-ms)\alpha-(au-cs)\beta+(am-ck)\gamma\}$$

以上より

$$y=\frac{-(ku-ms)\alpha+(au-cs)\beta-(am-ck)\gamma}{alu+bms+ckt-amt-bku-cls}$$

$$x=\frac{\alpha}{a}-\frac{b}{a}y-\frac{c}{a}z \qquad ①''$$

$$x=\frac{\alpha(alu+bms+ckt-amt-bku-cls)-b(-(ku-ms)\alpha+(au-cs)\beta-(am-ck)\gamma)-c((kt-ls)\alpha-(at-b\ \ )\beta+(al-bk)\gamma)}{a(alu+bms+ckt-amt-bku-cls)}$$

分子について

$\alpha(alu+\cancel{bms}+\cancel{ckt}-amt-\cancel{bku}-\cancel{cls}+\cancel{bku}-\cancel{bms}-\cancel{ckt}+\cancel{cls})+(-abu+\cancel{bcs}+act-\cancel{bcs})\beta+(abm-\cancel{bck}-acl+\cancel{bck})\gamma$

$$=\{(lu-mt)\alpha-(bu-ct)\beta+(bm-cl)\gamma\}$$

したがって

$$x=\frac{(lu-mt)\alpha-(bu-ct)\beta+(bm-cl)\gamma}{alu+bms+ckt-amt-bku-cls}$$

と解く以外にないでしょう。

その上で、この計算結果を整理すると、

$$x=\frac{(lu-mt)\alpha-(bu-ct)\beta+(bm-cl)\gamma}{alu+bms+ckt-amt-bku-cls}$$

$$y=\frac{-(\mathrm{ku}-\mathrm{ms})\alpha+(\mathrm{au}-\mathrm{cs})\beta-(\mathrm{am}-\mathrm{ck})\gamma}{alu+bms+ckt-amt-bku-cls}$$

$$\mathrm{z}=\frac{(kt-ls)\alpha-(at-bs)\beta+(al-bk)\gamma}{alu+bms+ckt-amt-bku-cls}$$

確かに分母は 3x3 の行列式になっています。

行列の形式で書くと、

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}a&b&c\\k&l&m\\s&t&u\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}(lu-mt)&-(bu-ct)&(bm-cl)\\-(ku-ms)&(au-cs)&-(am-ck)\\(kt-ls)&-(at-bs)&(al-bk)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$$

となりますが、右辺の行列の各要素の括弧の中は、２×２の行列の行列式の形になっています。

$$lu-mt=\begin{vmatrix}l&m\\t&u\end{vmatrix},\ bu-ct=\begin{vmatrix}b&c\\t&u\end{vmatrix},\ bm-cl=\begin{vmatrix}b&c\\l&m\end{vmatrix}$$

$$ku-ms=\begin{vmatrix}k&m\\s&u\end{vmatrix},au-cs=\begin{vmatrix}a&c\\s&u\end{vmatrix},am-ck=\begin{vmatrix}a&c\\k&m\end{vmatrix}$$

$$kt-ls=\begin{vmatrix}k&l\\s&t\end{vmatrix},at-bs=\begin{vmatrix}a&b\\s&t\end{vmatrix},al-bk=\begin{vmatrix}a&b\\k&l\end{vmatrix}$$

これらを使えば、行列式を使った表記に変えます。

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}a&b&c\\k&l&m\\s&t&u\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}l&m\\t&u\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}b&c\\t&u\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}b&c\\l&m\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}k&m\\s&u\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a&c\\s&u\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}a&c\\k&m\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}k&l\\s&t\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}a&b\\s&t\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a&b\\k&l\end{vmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$$

ここで、２元連立方程式の解から逆行列を考えたときのことを思い出します。

このことから、$\begin{pmatrix}a&b&c\\k&l&m\\s&t&d\end{pmatrix}$の逆行列は、

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

だろうと見当が付きます。試してみます。

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$$

と考えて

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

としたのだから３元の連立方程式では

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

とすることが考えられます。そうすると

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

ではないかと、想像がつきます。これが本当に$\boldsymbol{A}$の逆行列であることを確かめればよいことになります。

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \frac{\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}$$

分子について計算します。

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(lu - mt) - k(bu - ct) + s(bm - cl) & -b(lu - mt) + l(bu - ct) - t(bm - cl) & c(lu - mt) - m(bu - ct) + u(bm - cl) \\ -a(ku - ms) + k(au - cs) - s(am - ck) & -b(ku - ms) + l(au - cs) - t((am - ck) & -c(ku - ms) + m(au - cs) - u(am - ck \\ a(kt - ls) - k(at - bs) + s(al - bk) & b(kt - ls) - l(at - bs) + t(al - bk) & c(kt - ls) - m(at - bs) + u(al - bk) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} alu + bms + ckt - amt - bku - cls & 0 & 0 \\ 0 & alu + bms + ckt - amt - bku - cls & 0 \\ 0 & 0 & alu + bms + ckt - amt - bku - cls \end{pmatrix}$$

$$= (alu + bms + ckt - amt - bku - cls)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$を左から掛けても、元の豪列に変化はありませんから、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$は確かに、3×3 の単位行列で

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

は

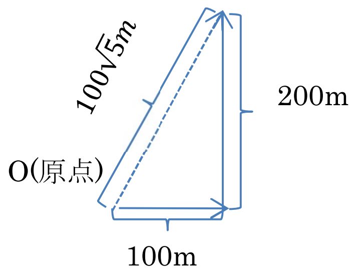
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

の逆行列ということになります。

ベクトル、算術、２つの例を挙げて行う列が具体的にどのように使えるのかを示しました。そうなると、行列演算のルール、行列式の求めかた、逆行列の作り方が分かれば、単位行列の意味が分かれば、様々なことが出来そうな気がしてきます。手っ取り早く、計算法が分かればよいという気分もわかりますが。ベクトルとしての行列と、算術としての行列を矛盾なくつなげていくことが、本質的な理解のためには重要です。そのためには、ベクトルとは何か、ベクトルに計算とはどういうものかというところから、ロジックを構成していく必要があります。以下はその説明です。

行列式と行列の機能

ベクトルとは方向と量をもったものだと思ってください。方向を持たない量をスカラーと言います。時速１ｋｍの１はスカラーですが、時速１ｋｍで南に行くは、方向を持っているから↓へ 1km/hr というベクトルです。一般の生活でも、「そこの道をまっすぐ 100m いって、左に曲がって 200m行く。」というようなベクトル的表現をしばしば使っています。その感じです。ベクトル的表現を使わないで道案内をするのは難しいでしょう。この例で分かるように、しばしばベクトルの足し算が行われます。この道をまっすぐ 100m というベクトルに、左に曲がって 200m というベクトルが足されました。図にすると次のような感じです。



これは確かにベクトルの足し算です。「まっすぐ 100m いく」というベクトルに、「左に曲がって 200m行く」というベクトルをたしたら、目的地は原点から見て「前方斜め左に $100\sqrt{5}$m 行ったところ」という新しいベクトルができました。
この例では、はじめに「まっすぐ」という言い方で、最初の方向を決めました。しかし、「まっすぐ」が東西南北どの方向を向いているのかはわかりません。そこで、この方向を基準にすることに決めてその方向での長さの単位を$\overrightarrow{e_1}$とします。この場合はまっすぐの方向に 1m を$\overrightarrow{e_1}$とそればよいでしょう。すると「まっすぐに 100m」というベクトルを$\vec{a}$とすると、

$$\vec{a} = 100\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$$

とベクトルを方向を示し単位ベクトルとスカラーの積で表すことができます。「左に曲がって 200m」ですが、本当に正確に直角に左に曲がることになるのかどうかはわかりませんが、とりあえず、その方向を$\overrightarrow{e_2}$とすると、

$$\vec{b} = 200\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$$

と表すことができて、さらに、新しくできた破線で示されたベクトルは

$$\vec{a} + \vec{b} = 100\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + 200\overrightarrow{e_2}$$

となります。

$$\vec{a} = 100\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$$

$$\vec{b} = 200\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$$

実際に直角になっているかどうかは、とりあえず問わないことにして、$\vec{a}$は$\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$の方向の要素を持たない、$\vec{b}$は$\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$の方向の要素を持たないならば、それぞれの方向要素のスカラーを成分として、それぞれのベクトルを、($\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$の成分, $\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$の成分）のように表すことにすると

$$\vec{a} = (100, 0)$$

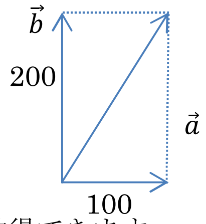
$$\vec{b} = (0, 200)$$

と表せます。だいぶ行列の表現に近くなってきました。ためにしに行列の足し算の約束にしたがって、$\vec{a} + \vec{b}$を計算します。

$$\vec{a} + \vec{b} = (100, 0) + (0, 200) = (100, 200)$$

仮に、右に曲がるときに正確に直角に曲がったとすれば

$\vec{a}+\vec{b}$=(100,200)



となるので、実感として納得できます。

ところで、$\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{pmatrix}$のように、ベクトルを、立てに一列に並べることを考えます。１行が一つのベクトルを表すということです。

$$\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\overrightarrow{e_1} & 0\overrightarrow{e_2}\\ 0\overrightarrow{e_1} & 200\overrightarrow{e_2}\end{pmatrix}$$

これを行列の掛け算の結果だと考えると

$$\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100 & 0\\ 0 & 200\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\overrightarrow{e_1}\\ 200\overrightarrow{e_2}\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}=100\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$$

$$\vec{b}=200\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$$

となってちゃんと元に戻ります。

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\begin{pmatrix}100 & 200\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\end{pmatrix}=\left(100\overrightarrow{e_1}+200\overrightarrow{e_2}\right)$$

$$\vec{a}+\vec{b}=100\overrightarrow{e_1}+200\overrightarrow{e_2}$$

こちらも、問題ありません。

ベクトルを示す矢印が煩わしいので、少し記法を変えます。スカラー量に対してベクトル量を区別して表すときにはゴシック（太字を使います）

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=100\boldsymbol{e_1}+200\boldsymbol{e_2}$$

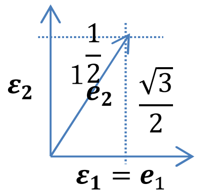
しかし、実際に町の中で正確に道が直行しているということは少ないでしょう。田舎の道ならなおさらです。つまり、上で示した式は、話した人、言われた人の頭の中の地図でそうなっているということです。つまり、その地図は実際の地図に比べると歪んでいるのです。ゆがみを直したらどうなるのかを知りたくなります。

たとえば、道は直行していてなくて、実際には 30°だけ傾いていたとします。

これを正しく直行している地図上の点として書きなおすことにします。人間が直交的だと思って表現した関係性に、客観的な空間情報を加えて、直交空間でとらえなおそうとする作業 A を加えて、実在する斜交的な$\boldsymbol{e_1}$と$\boldsymbol{e_2}$を単位行列を軸とする世界間でとらえなおそうということです。この作業 A を行列で表すことを考えます。

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon_1}\\ \boldsymbol{\varepsilon_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}\\ \boldsymbol{e_2}\end{pmatrix}$$

それぞれの単位行列の関係は以下の図のようになっています。



$$\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{\varepsilon_1}$$

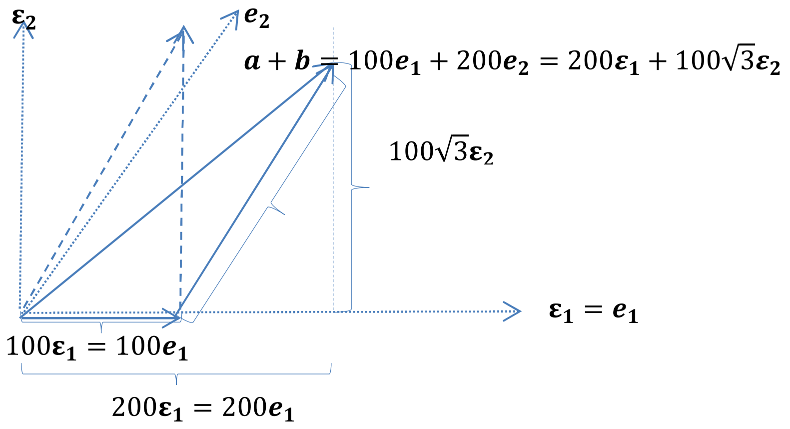
$$\boldsymbol{e_2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{\varepsilon_2}$$

という関係にあります。

これを、それぞれの単位ベクトルを立てに並べたたて行列にして、行列計算で表すと、次のようになります。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_1} \\ \boldsymbol{\varepsilon_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix}$$

試してみましょう



$$(100 \quad 200)\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix} = (100 \quad 200)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_1} \\ \boldsymbol{\varepsilon_2} \end{pmatrix}$$

$$(100 \quad 200)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \left(100 \times 1 + 200 \times \frac{1}{2} \quad 100 \times 0 + 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= (200 \quad 100\sqrt{3})$$

ですから

$$(100 \quad 200)\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}\\ \boldsymbol{e_2}\end{pmatrix} = (200 \quad 100\sqrt{3})\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon_1}\\ \boldsymbol{\varepsilon_2}\end{pmatrix}$$

となって、

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 100\boldsymbol{e_1} + 200\boldsymbol{e_2} = 200\boldsymbol{\varepsilon_1} + 100\sqrt{3}\boldsymbol{\varepsilon_2}$$

と同じ内容になっています。

つまり、A という作業をして、実際の地図上の点を直行的に認識できるように置き換えているのです。

このことは、反対に考えると、A という作業の内容がわかれば、人間の頭の中にある地図から、実際の地図を作ることができるということです。反対に、実際の地図上のルートから、人間の頭の出来上がる抽象的な、直交系のルートをつくる$\boldsymbol{A^{-1}}$という作業も考えられるということです。そこで A という作業を元に戻す作業、逆行列$\boldsymbol{A^{-1}}$を考えます。

逆行列の作り方はあとから学びましょう。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

の逆行列は

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

です。

試してみますか。

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1+0\times\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\times 0+0\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\times 1+1\times\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\times 0+1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となり、掛け合わせると単位行列になるので、確かに逆行列です。

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$$

ですから

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}\\ \boldsymbol{e_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon_1}\\ \boldsymbol{\varepsilon_2}\end{pmatrix}$$

となるはずですね

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e_1}\\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e_1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e_2}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_1}=\boldsymbol{e_1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e_1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e_2}$$

この関係を $\boldsymbol{e}$ について整理すると

$$\boldsymbol{\varepsilon_2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\varepsilon_1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e_2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{\varepsilon_2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\varepsilon_1}$$

$$\boldsymbol{e_2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{\varepsilon_2}$$

となって

$$\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{\varepsilon_1}$$

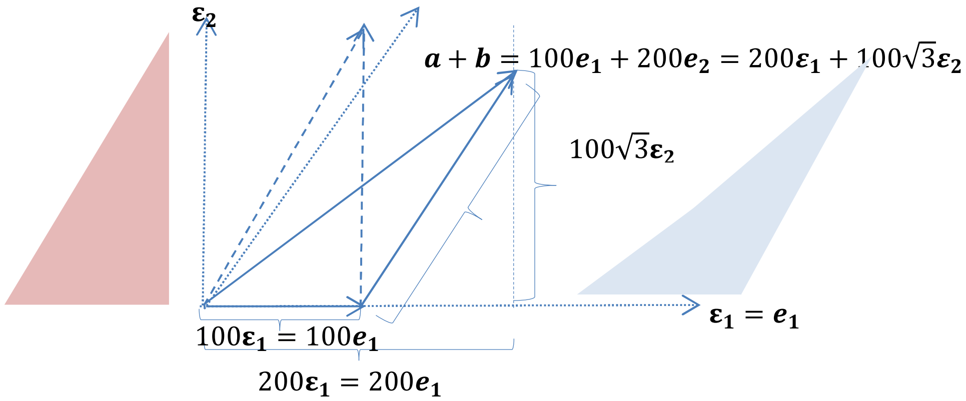
$$\boldsymbol{e_2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{\varepsilon_2}$$

が確かめられました。$\boldsymbol{A}$という操作によって歪んだ世界を投影して正しい世界を作ることができるし、その逆の$\boldsymbol{A^{-1}}$という操作によって、正しい世界歪んだ世界を作ることができるというわけです。この方法を利用して、たとえば曲面に曲面でないような普通の映像を映し出す技術ができています。ところで、今、正しい世界と言いましたが、人間は脳の中に、何らかの方法で世界の像を投影して認識しているのですから、その像は何らかの操作によってできたものであり、「正しい」世界そのものではありません。つまり、正しい認識と言ってもそれは何らかの像に過ぎないのです。だとすれば、あることについて様々な像を作り出すことが可能で、それらの関係は相対的で絶対的に像があるわけではありません。今、私たちが手にしたのは、それらの像の相互の関係を認識し、ある像を投影して別の像を作り出したり、作り出された像からもとの像を再生する技術を学んだということです。

もう一点、重要なことがあります。すでに、それとなく導入してしまっているのですが、行列もベクトルと考えることができるのです。すでに、ベクトルを立てに並べたり、横に並べたりして、行列を作るということを、何の断りもなくしてきました。それは、そのような感覚を自然に身に着けてもらいたかったからです。観念的には、ベクトルに行列をかけたら、そのベクトルの向きが変わったのですから、行列が方向性を持っていることがわかります。行列は、方向と大きさを持っています。

行列の大きさについて考えてみます。この説明の最初の部分で、行列式を使う必要があったので、行列式とは何かの大きさだとかなり無理な納得のさせ方をし、その計算方法も何の説明もしていません。ところが、実際、逆行列を求めるときには行列式が出てきて、行列式で割ることによって、単位行列が完成することが示されました。単位行列が大きさの単位でもあるとすれば、その行列式倍が行列の大きさだということが薄々想像がつきます。

そういう予想を立てながら、今までやってきたことを振り返ります。



上の図は、ベクトルを変換する際の計算を確かめるために作った、実際の移動を表した図です。赤紫で示したのは図の破線で囲まれた面積。つまり、人が頭の中で描いた移動を示すベクトルと、その図の上で交際された和のベクトルで囲まれた部分です。青で示したのは、実際の地図上の移動を示すベクトルと、ベクトルの和のベクトルで囲まれ場部分の面積です。赤紫の部分の面積は

$$100\times 200\times\frac{1}{2}=10000$$

青の部分の面積は

$$100\times\times 100\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=10000\frac{\sqrt{3}}{2}$$

紫の部分の面積と青の部分の面積の比は$\frac{\sqrt{3}}{2}$です。この値は

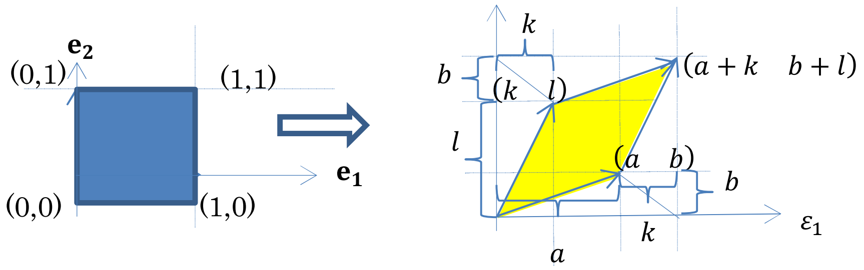
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

の行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

の値です。行列式を掛けることによって、もとのベクトル空間のどんな点でも、求めるベクトル空間の点に変換できるのですから、空間に描かれた図形も変換できることになります。当然その図形は大きさ（ベクトル２つで作られた空間ならば面積）を持っています。行列によって変換された図形の大きさは当然変わりますが、拡大・縮小率はどんな図形でも同じでしょう。それが行列式の値です。行列式とは、行列で変換したときに、ベクトル空間に描かれた図形（n 個のベクトルで作られた空間の図形であれば、n 次元の図形）

に、行列式が与える大きさの変化倍率です。
具体的な計算方法を考えます。



ベクトル(1,0), (0.1), (1,1)を$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}$によって変換することを考えます。

$$(1 \quad 0)\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix} = (a \quad b)$$

$$(0 \quad 1)\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix} = (k \quad l)$$

$$(1 \quad 1)\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix} = (a+k \quad b+l)$$

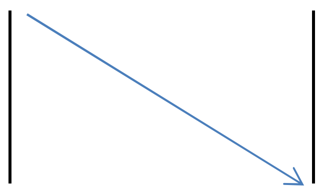
図に黄色で示したひし形の面積を求めます。
$(a+k)(b+l)$で求められる四角形の面積から$(a+k) \times b \times \frac{1}{2}$で求められる三角形の面積２つ分と、$(b+l)) \times k \times \frac{1}{2}$で求められる三角形の面積２つ分を引いたものです。

$$(a+k)(b+l) - 2(a+k) \times b \times \frac{1}{2} - 2(b+l)) \times k \times \frac{1}{2}$$

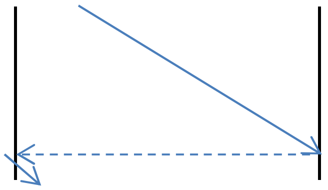
$$= \cancel{\mathrm{ab}} + \mathrm{al} + \cancel{\mathrm{bk}} + \cancel{\mathrm{kl} - \mathrm{ab} - \mathrm{bk}} - \mathrm{bk} - \cancel{\mathrm{kl}}$$

$$= \mathrm{al} - \mathrm{bk}$$

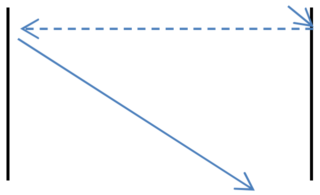
もっと簡略化してしまえば、長方形$a \times l$の面積から長方形$b \times k$の面積を差し引けばよいのです（サラスの方法)。
2×２の行列式については以上のように、比較的簡単に計算方法を示すことができます。n×n の場合について、計算方法を示すのは計算が複雑で大変です。そこで計算方法のみ示します。
下図の→方向にすべての値を掛け合わせます



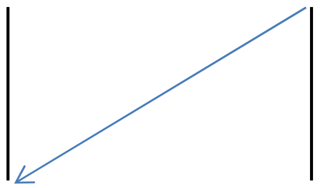
次にその隣列の１行目から始まって→方向にすべての値を掛け合わせます。それを、前の数に足します。



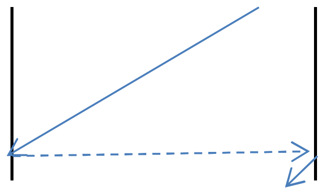
次々に隣の列から始まって同じことを繰り返し、最後の列までやって、合計を求めます。



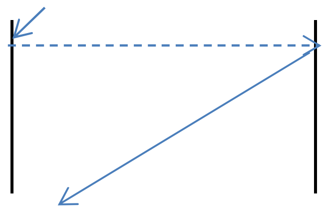
次に、１行目の最後の列から始まって同じことを反対向きにやります。その値を目の値から引きます。



次に左隣に移って同じことをして、前の値から引きます。



次に左隣に移って同じことをして、前の値から引きます。
同じことを繰り返して、一番左まで行ったらおしまいです。



覚えてしまえば簡単ですが、最初はわかりにくいと思うので、４×４の例を示します。

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ g & h & i & j \\ k & l & m & n \\ s & t & u & v \end{vmatrix}$$

$$= ahmn + bins + cjkt + dglm - dils - chkv - bgnu - ajmt$$

です。
これは「サラスの方法」の方法と呼ばれています。２次元の行列式で、

$$\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} = al - bk$$

を例にとって、この行列式が２つのベクトルで作られるひし形の面積を意味していて、その、ひし形も面積は、alで表される長方形の面積からbkで表される長方形の面積を差し引いて求められることを示しました、この計算方法をｎ次元に拡張したものを「サラスの方法」と呼びます。行列式の奇妙な計算方法はこのサラスの方法なのです。つまり、行列式とはｎ次元超平面のひし形の面積（ｎ次元超空間の立体の体積ともいえる。）のことです。決して「サラスの方法」で行列式を定義しているのではありません。「サラスの方法」はあくまで簡便な計算方法なのです。ここのところ、一般の教科書でしっかり説明されていません。あんな説明では、行列や行列式がわからなくなるのは当然です。行列式が出てきたら、「サラスの方法」を頭に描くのではなくて、ｎ次元超空間の立体を頭の中に描いてください（描けませんか。確かに無理ですね。しかし、描けなくても漠然とそういうものをイメージしてください。また、それがｎ次元超平面のひし形だということも描いてください。）

逆行列と余因子展開

次に逆行列です。逆行列を作る例はすでに示したので、それを一般化すればよいだけなのですが、間違えなく説明する自信がないので、答えだけ示します。

言葉でいうと、

１．逆行列は、余因子行列を元の行列の行列式で割ったものです。

２．余因子行列は、もとの行列の成分を取り除いた成分の行列式に符号をつけたもの（余因子）をそれぞれの成分とする行列の転置行列です。

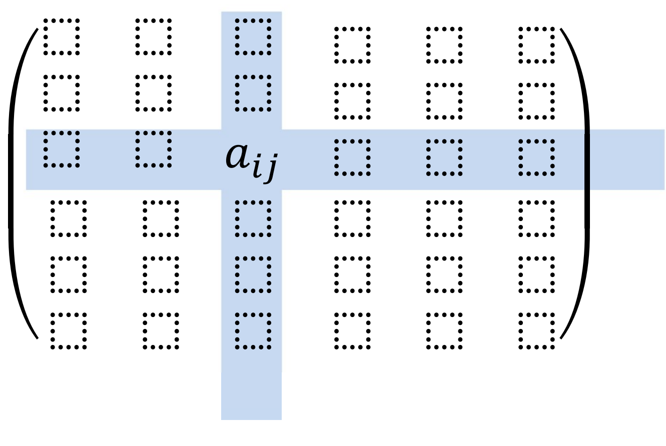
３．余因子とは元の行列の各成分 a_{ij} について、元の行列のｉ行とｊ列を取り除いた行列の行列式に符号をつけたものです。

となります。

これでは、なんだかわからないので、分解して説明します。実際の作業としては３，２，１の順番にやります。

分かりやすいように今まで使ってきた例をそのまま使います。

まず、余因子の説明です。成分a_{ij}については、元の行列のｉ行とｊ列を取り除いた行列とは下図の青い部分を取り除いた行列という意味です。



$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

その行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{n\,n} \end{vmatrix}$$

が、余因子行列の成分になるのですが、これに符号が付きます。符号とは＋とか―のことですが、i+j が偶数ならば+で奇数ならばーです。これが　余因子A_{ij}です。
図に示すと下図のように、市松模様になります。

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{n\,n} \end{vmatrix}$$

ということです。

具体的に$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$について示すと

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

です。
この行列の行と列を入れ替えます。行と列を入れ替えた行列を転置行列と言います。転置行列はA^Tと表します。

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{i1} & & A_{ij} & & A_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{1j} & & A_{ij} & & A_{nj} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

です。

これが、余因子行列で$\widetilde{\boldsymbol{A}}$と表します。

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{i1} & & A_{ij} & & A_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

です。

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

ならば

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

です。

これを、A の行列式で割ったものが逆行列です。

以上より、3×３行列の逆行列は以下のようになります。

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

行列式の計算も逆行列の計算も大変面倒で途中で間違えそうですね。確かにその通りで、手で計算していたら、正しい答えがなかなか出せません。そこはコンピューターのお世話になりましょう。エクセルなどの表計計算ソフトには、行列式や逆行列を求めてくれるコマンドがあります。それを使えば良いのです。また、実際に逆行列を使う場面はそう多くありません。そう思ったので、行列を使って、ベクトルで表された空間を投影して変換するという行列の重要な機能の理解に絞って説明したのです。私は、こうした機能が行列の本質だと思っています。ですから、あまり計算方法にこだわらなかったのです。たとえば、普通の本では行列式の計算方法として「掃出し法」が紹介されています。確かに、「掃出し法」は行列式を間違えずに短時間で計算するには優れた方法です。しかし、その本質は連立方程式の解法と違いがありません。行列を導入することの魅力は、空間全体を変換・投影することにあると思います。試験問題を解くという目的からすれば、「掃出し

法」を知っておくことは必要です。しかし、本質的な理解ではないような気がします。そういう理由ではじめに「掃出し法」を説明しませんでした。あまり本質的ではないとは言いながら、掃出し法にも本質的な問題が含まれています。大事なのは、何故掃き出し法が成立するのかです。それを考えるときのキーになるのが余因子展開です。普通は、行列式の計算法として、余因子展開が説明されるのですが、行列を本質的に理解するために、どうして、陽因子展開が出来るのかを説明します。またその過程で、余因子展開の応用であるクラメルの公式についても説明します。しかしその前に、今までまとめて、説明してこなかった行列演算のルールを説明します。

行列の演算

行列の足し算

行列の場合、結局、２ｘ２の行列に還元されるので、２ｘ２の行列について考えます。

まず、行列同士の足し算を考えます。

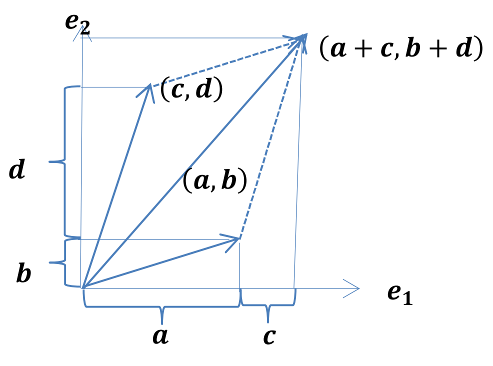
$$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ k+m & l+n \end{pmatrix}$$

でよさそうですが念のために確かめましょう。

これを、ベクトルとして考えて、ベクトルの基底つまり、直行する単位ベクトルを省略して書いたものと考えると、

$$\begin{pmatrix} ae_1 & be_2 \\ ke_1 & le_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ce_1 & de_2 \\ me_1 & ne_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+c)e_1 & (b+d)e_2 \\ (k+l)e_1 & (l+n)e_2 \end{pmatrix}$$

ということを明らかにすることです。ベクトルを図に描けば、下図のようになります。



$(\boldsymbol{a+c} \quad \boldsymbol{b+d})$とは、$(a+c)\boldsymbol{e_1}+(b+d)\boldsymbol{e_2}$をこのように書くとことにしたのですから。

$$(a \quad b) + (c \quad d) = (a+c \quad c+d)$$

はこの図から明らかです

二行目についても同じことですから、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ k+m & l+n \end{pmatrix}$$

何次元でも行列を足し合わせていくだけのことですから

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

行列のスカラ

和が定義できれば、

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{pmatrix}$$

α はスカラー

は明らかです。

行列の入れ替え

行列の行や列を入れ替えることを考えます。

$\begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}$の行を入れ替えると$\begin{pmatrix} k & l \\ a & b \end{pmatrix}$です。

ベクトルを並べただけですから何の違いもないようです。では、行列の大きさである行列式を考えましょう

$$\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} = al - bk$$

$$\begin{vmatrix} k & l \\ a & b \end{vmatrix} = kb - al = -(\mathrm{al} - \mathrm{bk})$$

です。

$$\begin{vmatrix} k & l \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}$$

です。考えてみれば当然ですね。

$$ax + by = \alpha$$

$$kx + ly = \beta$$

という連立方程式で、上の式から下の式を引く計算をすると右辺は α―β ですが、上下を入れ替えて引き算すれば β―α と絶対値が同じで負号がかわるのと同じです。

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$のようなとき、$\begin{pmatrix} s & t & u \\ a & b & c \\ k & l & m \end{pmatrix}$のように入れ替えたらどうなるかですが

$$\begin{pmatrix} s & t & u \\ a & b & c \\ k & l & m \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b & c \\ s & t & u \\ k & l & m \end{pmatrix} = -(-\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

つまり、一つ移動するごと符号が変わると考えれば良いのです。行列では行で成り立つこ

とは列でも成り立ちます。もうわかってきましたね。余因子行列を作るときに、因子の行と列で符号が決まっていたのはそのためです。つまり、ある因子の行を一番上の行に動かし、その因子の列をまた一番左の列に動かしていたのです。もとの行が i 行ならば、先頭に持ってくるのに i－１回入れ替えます。元の列が j 列ならば、j－１回動かしますから、全部で i+j－２回動かすことになります。そのたびに負号が変わるので負号は$(-1)^{i+j-2}$になります。$(-1)^2$は正ですから、負号は$(-1)^{i+j}$と計算すれば良いでしょう。余因子行列の、成分の符号が

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

のような市松模様になるのはそのためです。

行列の掛け算

これはすでに説明しました。ここまで何回か使っていますので、慣れてきたと思います。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2j} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i1} & & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2j} & & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & & & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{2n} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots a_{1k}b_{k1} \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots a_{1k}b_{kn} \ldots a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & a_{i1}b_{1j} + \cdots a_{ik}b_{kj} \cdots + a_{in}b_{nj} & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + \cdots a_{nk}b_{k1} \cdots + a_{nn}b_{n1} & \ldots & a_{n1}b_{1n} + \cdots a_{nk}b_{kn} \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

行列の掛け算で重要なことは、交換法則が成り立たないということです。一般的には

$$\boldsymbol{AB \neq BA}$$

です、ただし、連続する掛け算の計算の順番は代えられます。

$$\boldsymbol{(AB)C = A(BC)}$$

なお、転置行列同士の掛け算は、掛け算した者の転置行列です。

$$\boldsymbol{A^T B^T = (AB)^T}$$

クラメルの公式

私たちが、導き出した連立方程式の行列演算的な答えは

連立方程式の行列的な表現として

$$\boldsymbol{AX = \alpha}$$

が与えられたときに、

$$\boldsymbol{X = A^{-1}\alpha}$$

という行列で答えが導けるということでした。

３元１次の連立方程式

$$ax + by + cz = \alpha \qquad ①$$
$$kx + ly + mz = \beta \qquad ②$$
$$sx + ty + uz = \gamma \qquad ③$$

についてこの方法で記述すると

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

として

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

と表せます。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

だから、

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$$

は下式のようになります。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix}\alpha & -\begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix}\beta & \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix}\gamma \\ -\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix}\alpha & \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix}\beta & -\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix}\gamma \\ \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix}\alpha & -\begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix}\beta & \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}\gamma \end{pmatrix}$$

これは行列的な表現でまとめて書いてありますが、一つ一つの未知数についてばらばらに書くと

$$x = \frac{\begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix}\alpha - \begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix}\beta + \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix}\gamma}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{-\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix}\alpha + \begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix}\beta - \begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix}\gamma}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix}\alpha - \begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix}\beta + \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix}\gamma}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}$$

となります。これじっと見ていると、あることに気が付きます。何か法則性がありそうに見えます。あれこれ弄り回してくれればよいのですが、次の行列式を計算してみてください。

$$\begin{vmatrix} \alpha & b & c \\ \beta & l & m \\ \gamma & t & u \end{vmatrix}$$

$$= \alpha lu + bm\gamma + c\beta t - \alpha mt - b\beta u - cl\gamma$$

$$= \alpha(lu - mt) + \beta(ct - bu) + \gamma(bm - cl)$$

$$= \alpha(lu - mt) - \beta(bu - ct) + \gamma(bm - cl)$$

$$= \alpha\begin{bmatrix} l & m \\ t & u \end{bmatrix} - \beta\begin{bmatrix} b & c \\ t & u \end{bmatrix} + \gamma\begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix}$$

これはxについての解の分子ですから

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b & c \\ \beta & l & m \\ \gamma & t & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}$$

同じことをyについてやります。

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & c \\ k & \beta & m \\ s & \gamma & u \end{vmatrix}$$

$$= a\beta u + \alpha ms + ck\gamma - am\gamma - \alpha ku - c\beta s$$

$$= \alpha(ms - ku) + \beta(au - cs) + \gamma(ck - am)$$

$$= -\alpha(ku - ms) + \beta(au - cs) - \gamma(am - ck)$$

$$= -\alpha\begin{vmatrix} k & m \\ s & u \end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix} a & c \\ s & u \end{vmatrix} - \gamma\begin{vmatrix} a & c \\ k & m \end{vmatrix}$$

これはｙの解の分子だから

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha & c \\ k & \beta & m \\ s & \gamma & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}$$

同様にして、ｚについて考えると。

$$\begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ k & l & \beta \\ s & t & \gamma \end{vmatrix}$$

$$= al\gamma + b\beta s + \alpha kt - a\beta t - bk\gamma - \alpha ls$$

$$= \alpha kt - \alpha ls + b\beta s - a\beta t + al\gamma - bk\gamma$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} a & b \\ k & l \end{pmatrix}$$

となって、

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ k & l & \beta \\ s & t & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}$$

全ても未知数についてもう一度書くと、

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

の解は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b & c \\ \beta & l & m \\ \gamma & t & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha & c \\ k & \beta & m \\ s & \gamma & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ k & l & \beta \\ s & t & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}}$$

大変、簡単な形になって、逆行列を計算する必要なくなりました。実は、いま求めた式はクラメルの公式と言って、行列演算では最も重要な公式です。

３次以上のｎ次連立方程式にも使えます。一般的な書き方は以下の通りです。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

として

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$$

の時

$$x_i = \frac{|\boldsymbol{A_i}|}{|\boldsymbol{A}|}$$

ただし、$\boldsymbol{A_i}$は以下のように定義します。

$$\boldsymbol{A_i} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

ｉ番目のｘについて、行列Ａのｉ列目の縦行列を、ｂの縦行列と入れ替えるということです。

さて、ここまで来ると、逆行列を作った時の作業、余因子行列を作ったり、転置行列を作ったことの意味がぼんやりと分かりかけてきました。普通、クラメルの公式はこのような手順ではなくて、行列の計算ルールに従った演算の結果として誘導されます。

余因子展開と掃き出し法・クラメルの公式

掃き出し法とクラメルの公式は、どちらも連立方程式の解法としての算術です。
そこで、今まで考えてこなかった行列の演算のルールを確認しながら、クラメルの公式を誘導して掃き出し法との同一性を確認します。途中で、余因子展開というのも出てきます。これが、逆行列の数理的理解につながります。これを通じて、演算法の持っている意味（直感的なイメージ）と細かい計算のプロセスの理解を一致させたいと思います。
まず、行列式を分解することを考えます。
行列の和ではなくて、大きさとしての行列式の値の問題です。

$$\begin{vmatrix} a & b+w \\ k & l+z \end{vmatrix} = a(l+w) - (b+w)k = al + az - bk - wk$$

$$= \mathrm{al} - \mathrm{bk} + \mathrm{az} - \mathrm{wk} = \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & w \\ k & z \end{vmatrix}$$

これは、n 次の行列でも同じことだというのは、わかりますね。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_i & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & +b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & +b_i & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & +b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

そこで、ある列に 0 を n-1 個たすことを考えます。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+\overbrace{0+\cdots+0}^{n-1\,個} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}+0+\cdots+0 & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+0+\cdots 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と変形して

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+0+\cdots+0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \overbrace{0+\cdots+}^{j-1\,個}a_{ij}+0+\cdots+0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0+\cdots 0+a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ のようにたす順番を変えると

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

というように書けます。ここで、とりあえず代表として、たくさん加えている行列式の一番先頭の行列式だけを考えます。この行列式のｉ列目を一番左に持ってくることを考えます。行列の行や列を入れ替えるたびに負号が変わるのですから、一番左に持ってきたときの符号は$(-1)^{i-1}$です。

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & a_{i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \ddots & a_{2i-1} & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \vdots & & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

次に、第一列目のa_{ij}に適当な数を掛けて、第一列の各因子から差し引いて、次のように変形します。行や列に適当な数を掛けて他の行や列から差し引いても、行列式の値が変わらないということは、理解できるでしょう。連立方程式を解くときに、他の式から他の式の何倍かを差し引いても、連立方程式の解が変わらないことと同じことです。ということで、式は次のように変形できます。

$$
=(-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{1j} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & \ddots & a_{2i-1} & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \vdots & & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

ここからの変形ですが、結論を先に述べます。

$$
(-1)^{i-1} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

この変形の説明ですが、多くの本には大変複雑な説明が書かれています。あるいは、まったく書かれていません。よくあるのは、「行列式とは、行と列が重ならないように成分を選び、その全ての組み合わせを考え、符合を付け、和をとったものである。だから、もし、１行目で a_{1j}が選ばれなければ、必ず ０ が選ばれるので、その項は ０ になる。結局、残る項は全て a_{1j}を含む。」という説明です

確かに、そうなのですが、この文章の意味は理解可能ですか。そもそも、「行列式とは、行と列が重ならないように成分を選び、その全ての組み合わせを考え、符合を付け、和を

とったものである。」という行列式の定義がどこから出てきたのかわかりません。たいていの場合、行列式の計算では、サラスの方法を使うというのが説明されていて、定義なんかあらかじめ説明されていません。サラスの方法というのは、n 次元の立体の体積（n 次元でベクトルが形成するひし形のようなものの大きさ。他に適当な言葉を思いつかないから、３次元のイメージで体積という言葉を用いる。）を簡便に計算する方法で、行列式の計算にそれが使えるのは、行列式が n 次元超空間の立体の「体積」のことだからです。それならば、サラスの方法が何故、成り立つのかを説明してもらわないと何を説明されたのかわかりません。サラスの方法ですが、代数的な証明ができないわけではないのですが、何しろ n 次元空間にですから（というか４次元ぐらいでももはや)、計算式が複雑で、よほど上手にやらないと計算間違いをしてしまいます。少なくとも私は自信がありません。
しかし、もっと簡単に理解する方法があります。
しつこいようですが、行列式というのは、ベクトルが作る超立体の体積（正しくは大きさ。体積というのはイメージです。）のことです。
行列式

$$\begin{vmatrix} a_{1j} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & \ddots & a_{2i-1} & a_{2i+1} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \vdots & & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

の、各行をベクトルだと考えると、１行目のベクトル成分はa_{1j}だけで、他の行にはa_{1j}は含まれません。つまり、n 次元の空間において、１行目は独立しています。つまり、他のベクトルが作る$n-1$次元の超立体、n次元で見ればいわば平面（n 次元に人が住んでいるのか、その人が$n-1$次元平面をどのように観るのかは知りませんが）に直交して、一人、超然として立っていることになります。まことに立派です。尊敬に値します。超平面には、$n-1$次元のひし形($n-1$次元を空間とみれば、超立体)が j 列を除いた行列式の値の面積を持って描かれています。底面をなすこの面積（行列式の値）に高さであるa_{1j}を掛ければ、n 次元の超立体の体積になるでしょう。

驚いたことに、この極めて簡単な説明を書いてある教科書がないのです。難しそうなことを言っているけれど、こんな簡単説明ができないなって、おじさんホントは馬鹿なんじゃないのと言いたくなります（私が甥からよく言われていたｾﾘﾌです。)。馬鹿なんじゃなくて、実は、それなりに別に伝えたいことがあるのですけれど、難しいことを覚えなければならないことが沢山あって、初心者に理解が大変だということに対する思いやりがないのです。勉強ができる人の欠陥ですね。
どうしても、代数的な証明をしたいという人のために、方向性だけ示します。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} = al - bk$$

を例に挙げたときに、図を描いてひし形の面積を長方形alの面積から長方形bkの面積を差し引けばよいことを示しました。

ここで２次元の平面を立体と考えると、１次元である直線は、２次元マイクロ立体空間（そういう言葉があるかどうか知りません）に対して、マイクロ平面であり、そのマイクロ平面上に$|a|, |b|, |k|, |l|$の行列式の値を持つ「マイクロひし形」が描かれているとします。そう考えて、与えられた行列式を第一行で余因子展開すると

$$\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} = a|l| - b|k|$$

ということになって、$|l| = \mathrm{l}$、$|k| = \mathrm{k}$ですから、

$$\begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} = al - bk$$

に戻ります。馬鹿馬鹿しいですか。「オジさん本当はバカなんじゃない。」と言われても仕方ありませんね。しかし、とにかく n 次元空間で同じことをすればよいということです。頑張ってください。

それはそれとして、ｊは１から n までありますから、それについて全て同じことをして、とここまで書いて、列についての余因子展開の説明になっていることに気が付きました。行列では列で成り立つことは行でも成り立ちます。ということで、第一列について書くと

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{i-1} a_{1i} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2i-1} & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{n-1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

この説明で明らかなように、どこの行でも、どこの列でも余因子展開ができます。このことの方が重要です。当然のことですが、２列目で余因子展開するときは、１列目とは符号が反対になります。だからｉ行での余因子展開を一般化して書くと

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{ij} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \vdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

これを余因子展開と言います。記号になじみがないので、分かりにくいですね。3× 3の正方行列で、余因子展開を具体的に書きます。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

という行列で、この行列式は、

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix} = alm + bms + ckt - amt - bku - cls$$

です。第一列で余因子展開をします。

第一列の、a, k, sについて、下の行列の青く廃棄を新田所イガイガよ因子になりますから

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

それぞれ以下の様に起算して

$$a \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} = a(lu - mt) = alu - amt$$

$$-k \begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} = k(bu - ct) = -bku + ckt$$

$$s \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} = s(bm - cl) = bms - cls$$

合計+

$$a \begin{vmatrix} l & m \\ t & u \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b & c \\ t & u \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} b & c \\ l & m \end{vmatrix} = alu + bms + ckt - amt\ - bku - cls = \begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ s & t & u \end{vmatrix}$$

ということです。

余因子展開を知っていれば、最後は２ x ２の行列式にまで、式を変形することができるので、これも有力な行列式の計算の仕方です。しかし、それ以上に大事なのは、説明の途中に使った超平面上に超然と直行して立っているベクトルというイメージです。別に、超然として起立している孤高の人になれと言っているのではありません。偏相関や主成分分析を理解するときに出てきます。

さて、忘れかけていましたが、クラメルの公式を行列演算的に導きましょう。結構複雑で頭が痛くなりますが、この説明を読むと、逆行列がなぜあの形になるのかを理解できます。少し付き合ってください。真剣に読む必要はありません。

クラメルの公式とは、以下の連立方程式を解く方法ですね。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$を第一列で余因子展開すると

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{1i} \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

となりますが、

$$(-1)^{j-1} \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

をいちいち書くのが面倒くさいので、i 行 j 列を取り除いて、符号をつけたものを余因子と名をつけて、$\boldsymbol{A_{ij}}$と表すことにします。

$$\boldsymbol{A_{ij}} = (-1)^{ij} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \vdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ということです。
この記法で書くと第一行目の余因子展開は、

$$a_{11}\boldsymbol{A_{11}} + a_{12}\boldsymbol{A_{12}} + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{A_{1n}} = \boldsymbol{A}$$

となります。行列で書くと

$$(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{A_{11}} \\ \boldsymbol{A_{12}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A_{1n}} \end{pmatrix} = |\mathbf{A}|$$

ということです。
ところで 1 行目を 2 行目で書き換えた行列を考えると、

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

０になるのは、同じ行を含む行列の行列は０だからです。連立方程式に同じものが入って

いると、左辺が０になって解けなくなるのと同じことです。
余因子行列の表記法を使うと、次のようになります。

$$a_{21}\boldsymbol{A_{11}} + a_{22}\boldsymbol{A_{12}} + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{A_{1n}} = 0$$

つまり、各余因子の前の係数だけがかわり、右辺が０になります。これをｎ列まで繰り返すと

$$a_{11}\boldsymbol{A_{11}} + a_{12}\boldsymbol{A_{12}} + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{A_{1n}} = [\boldsymbol{A}]$$
$$a_{21}\boldsymbol{A_{11}} + a_{22}\boldsymbol{A_{12}} + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{A_{1n}} = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}\boldsymbol{A_{11}} + a_{n2}\boldsymbol{A_{12}} + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{A_{1n}} = 0$$

これを行列で表記すると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A_{11}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{A_{1n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

同じことは第２列についてもできるから

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A_{21}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{A_{2n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |\boldsymbol{A}| \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

これをｎ行目まで繰り返すと

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{21}} & \cdots & \boldsymbol{A_{n1}} \\ \boldsymbol{A_{12}} & \boldsymbol{A_{22}} & \cdots & \boldsymbol{A_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A_{1n}} & \boldsymbol{A_{2n}} & \cdots & \boldsymbol{A_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & & \\ & \ddots & \\ & & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}$$

$$= |\boldsymbol{A}| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = |A|\boldsymbol{E_n}$$

$\boldsymbol{E_n}$はｎ時の単位行列

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{21}} & \cdots & \boldsymbol{A_{n1}} \\ \boldsymbol{A_{12}} & \boldsymbol{A_{22}} & \cdots & \boldsymbol{A_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A_{1n}} & \boldsymbol{A_{2n}} & \cdots & \boldsymbol{A_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}} & \cdots & \boldsymbol{A_{1n}} \\ \boldsymbol{A_{21}} & \boldsymbol{A_{22}} & \cdots & \boldsymbol{A_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A_{n1}} & \boldsymbol{A_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{A_{nn}} \end{pmatrix}^T$$

$\boldsymbol{A^T}$は**A**の転置行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}} & \cdots & \boldsymbol{A_{1n}} \\ \boldsymbol{A_{21}} & \boldsymbol{A_{22}} & \cdots & \boldsymbol{A_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A_{n1}} & \boldsymbol{A_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{A_{nn}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{E_n}$$

もとの行列に逆行列を右からかけても左からかけても単位行列になるので、

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}} & \cdots & \boldsymbol{A_{1n}} \\ \boldsymbol{A_{21}} & \boldsymbol{A_{22}} & \cdots & \boldsymbol{A_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A_{n1}} & \boldsymbol{A_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{A_{nn}} \end{pmatrix}^T$$

は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の逆行列です。
以上が逆行列の計算プロセスです。
ということで、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{21}} & \cdots & \boldsymbol{A_{n1}} \\ \boldsymbol{A_{12}} & \boldsymbol{A_{22}} & \cdots & \boldsymbol{A_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A_{1n}} & \boldsymbol{A_{2n}} & \cdots & \boldsymbol{A_{nn}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

というところまで来ました。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1\boldsymbol{A_{11}} + b_2\boldsymbol{A_{21}} + \cdots + b_n\boldsymbol{A_{n1}} \\ b_1\boldsymbol{A_{12}} + b_2\boldsymbol{A_{22}} + \cdots + b_n\boldsymbol{A_{n2}} \\ \vdots \\ b_1\boldsymbol{A_{1n}} + b_2\boldsymbol{A_{2n}} + \cdots + b_n\boldsymbol{A_{nn}} \end{pmatrix}$$

つまり

$$x_i = \frac{1}{|A|}(b_1\boldsymbol{A_{1i}} + b_2\boldsymbol{A_{2i}} + \cdots + b_n\boldsymbol{A_{ni}})$$

ところで

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

をｉ列で余因子展開すること考えます。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= b_1\boldsymbol{A_{1i}} + b_2\boldsymbol{A_{2i}} + \cdots + b_n\boldsymbol{A_{ni}}$$

なので

$$x_i = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

となって、クラメルの公式が導かれました。このプロセスを見ることによって、逆行列を作るときに符号をつけたり、転置行列を作ったりすることの意味が分かったと思います。
蛇足

感覚的な理解を重視するという観点で、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

を逆行列をつかって、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{21}} & \cdots & \boldsymbol{A_{n1}} \\ \boldsymbol{A_{12}} & \boldsymbol{A_{22}} & \cdots & \boldsymbol{A_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A_{1n}} & \boldsymbol{A_{2n}} & \cdots & \boldsymbol{A_{nn}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

と解くという解法ですが、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1\boldsymbol{A_{11}} + b_2\boldsymbol{A_{21}} + \cdots + b_n\boldsymbol{A_{n1}}}{|A|} \\ \dfrac{b_1\boldsymbol{A_{12}} + b_2\boldsymbol{A_{22}} + \cdots + b_n\boldsymbol{A_{n2}}}{|A|} \\ \vdots \\ \dfrac{b_1\boldsymbol{A_{1n}} + b_2\boldsymbol{A_{2n}} + \cdots + b_n\boldsymbol{A_{nn}}}{|A|} \end{pmatrix}$$

という答えの

$$x_1 = \frac{b_1\boldsymbol{A_{11}} + b_2\boldsymbol{A_{21}} + \cdots + b_n\boldsymbol{A_{n1}}}{|A|}$$

をよく見て考えると

$\boldsymbol{A_{11}}, \boldsymbol{A_{21}}, \cdots\ \boldsymbol{A_{n1}}$という行列式は、ｎ次元の超立体から見た時の１次元下の立体（平面のようなもの）独立してそこに直交するベクトル方向の高さを掛けて、超立体の体積を求めて、その和を、元の行列の持っている大きさ（というか拡大倍率）で割っているという計算になります。逆行列と逆行列をつあった計算について、こんなイメージを作ると、記憶しやすいと思います。

行列の分割

余因子展開も行列式の分割ですが、行列を任意の大きさ小行列に分けたいときがあります。

まず、次のような、　部分行列からなる行列を考えます。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}} \\ \boldsymbol{A_{21}} & \boldsymbol{A_{22}} \end{pmatrix}$$

次にこの行列の逆行列を考え、それを$\boldsymbol{B}$として次のように表します

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B_{11}} & \boldsymbol{B_{12}} \\ \boldsymbol{B_{21}} & \boldsymbol{B_{22}} \end{pmatrix}$$

つまり、下記のようなことです。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & a_{1q+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \boldsymbol{A}_{11} & \vdots & \vdots & \boldsymbol{A}_{12} & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & a_{pq+1} & \cdots & a_{pn} \\ a_{p+11} & \cdots & a_{p+11} & a_{p+1\,q+1} & \cdots & a_{p+1\,q+1} \\ \vdots & \boldsymbol{A}_{21} & \vdots & \vdots & \boldsymbol{A}_{22} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & a_{nq+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{a^{11}}{\Delta} & \cdots & \frac{a^{1q}}{\Delta} & \frac{a^{1q+1}}{\Delta} & \cdots & \frac{a^{1n}}{\Delta} \\ \vdots & \boldsymbol{B}_{11} & \vdots & \vdots & \boldsymbol{B}_{12} & \vdots \\ \frac{a^{p1}}{\Delta} & \cdots & \frac{a^{pq}}{\Delta} & \frac{a^{p\,q+1}}{\Delta} & \cdots & \frac{a^{pn}}{\Delta} \\ \frac{a^{p+11}}{\Delta} & \cdots & \frac{a^{p+1q}}{\Delta} & \frac{a^{p+1q+1}}{\Delta} & \cdots & \frac{a^{p+1n}}{\Delta} \\ \vdots & \boldsymbol{B}_{21} & \vdots & \vdots & \boldsymbol{B}_{22} & \vdots \\ \frac{a^{n1}}{\Delta} & \cdots & \frac{a^{nq}}{\Delta} & \frac{a^{nq+1}}{\Delta} & \cdots & \frac{a^{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = |\boldsymbol{A}|$$

ここで

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$$

$\boldsymbol{I}$は n 次の単位行列

ですから、これを今決め小行列の記述法に従って書くと

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となって、実際に計算すると

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから

$$\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} = 1$$

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} = 1$$

$$\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} = 0$$

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} = 0$$

となります。

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} = 0$$

を使うと

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11} = -\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21}$$

$$\boldsymbol{A}_{21} = -\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21}{\boldsymbol{B}_{11}}^{-1}$$

$$-\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21}{\boldsymbol{B}_{11}}^{-1}\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} = 1$$

$$\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} = 1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21}{\boldsymbol{B}_{11}}^{-1}\boldsymbol{B}_{12}$$

（この変形、あわてないで左から逆行列をかけてください。割り算ではありません。スカラーでの割り算に相当するものは両辺に逆行列をかけることです。右側からか左側からかはよく考えてください。行列演算では交換法則が成り立ちません。）

これを

$$\boldsymbol{A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}}=1$$

に代入すると

$$\boldsymbol{A_{11}B_{11}+A_{12}\left(-A_{22}{}^{-1}A_{21}B_{11}\right)}=1$$

これ　の両辺に右側から$\boldsymbol{B_{11}}{}^{-1}$をかけると

$$\boldsymbol{A_{11}-A_{12}A_{22}{}^{-1}A_{21}=B_{11}{}^{-1}}$$

左右を移項して

$$\boldsymbol{B_{11}{}^{-1}=A_{11}-A_{12}A_{22}{}^{-1}A_{21}}$$

$$\boldsymbol{B_{11}=\left(A_{11}-A_{12}A_{22}{}^{-1}A_{21}\right)^{-1}}$$

$\boldsymbol{A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}}=0$と$\boldsymbol{A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}}=1$について、同じことをすると

$$\boldsymbol{B_{12}=-A_{11}{}^{-1}A_{12}B_{22}}$$

$$\boldsymbol{B_{22}{}^{-1}=A_{22}-A_{21}A_{11}{}^{-1}A_{12}}$$

$$\boldsymbol{B_{22}=\left(A_{22}-A_{21}A_{11}{}^{-1}A_{12}\right)^{-1}}$$

全部を整理すると

無理に行列式として書けば$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}}\\ \boldsymbol{A_{21}} & \boldsymbol{A_{22}}\end{pmatrix}^{-1}=$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\left(A_{11}-A_{12}A_{22}{}^{-1}A_{21}\right)^{-1}} & \boldsymbol{-A_{11}{}^{-1}A_{12}\left(A_{22}-A_{21}A_{11}{}^{-1}A_{12}\right)^{-1}}\\ \boldsymbol{-A_{22}{}^{-1}A_{21}\left(A_{11}-A_{12}A_{22}{}^{-1}A_{21}\right)^{-1}} & \boldsymbol{\left(A_{22}-A_{21}A_{11}{}^{-1}A_{12}\right)^{-1}}\end{pmatrix}$$

と書けなくもないのですが、かえって複雑ですね。行列表現の前の形の方が理解しやすいでしょう。

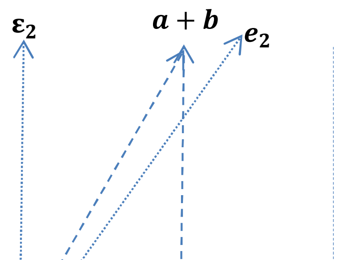
固有値

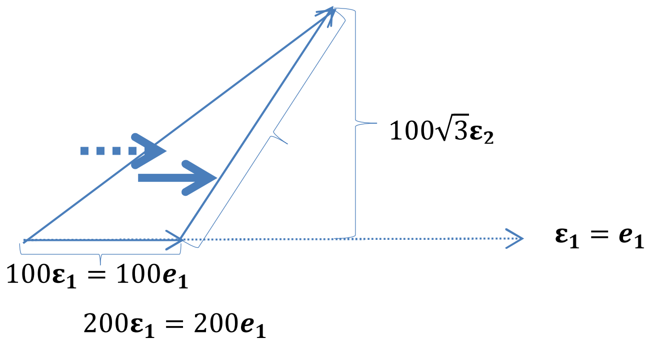
次に、固有値について説明しておきます。固有値はいろいろなところに出てきます。問題を固有値の問題に還元して考えるということが多いので、理解しておくことが必要です。だいぶ慣れてきたので、話はかなり簡単です。

最初にやった、100m先の角を左に曲がって 200m 行った先の話です。この時道が３０度歪んでいたので、頭の中で直行している地図を、実際の位置に合わせるための変形として、行列を左からかけるという話です。

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

というのがその時の変換に使った行列です。すでに使った図ですが、変換の内容を図示すると、次のよう描けます





この図の中で、座標軸の移動に伴って、ベクトル作る三角形は歪みましたが、破線で示した太い矢印は、実線のように移動して少し長さが変わったものの、矢印の方向は変わっていません。このように行列を掛けることによって、移動したり、大きくなっても方向が変わらないベクトルをその行列の固有ベクトルと言います。また、どのくらい大きくなるかという比率を固有値と言います。

つまりベクトルの方向が変わらずに大きさだけが変わるということを式で表すと、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ということです。λ は固有値です。行列式を連立方程式で書くと

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda x_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda x_2$$

なので、左辺に移行して行列式の形で書くと

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ということです。

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

式 99

を解けば固有値λが得られます。この式からも明らかなように n 次の行列には通常 n 個の固有値があります。もちろん重根があれば、その分重複ができますから、重根の数だけ固

有値は少なくなります。
具体的にやってみます。
図に示した地図の例です

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda\right) = 0$$

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

この場合はかなり特殊で、$\lambda = 1$を代入すると、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-1 \end{pmatrix}\binom{x_1}{x_2} = \binom{0}{0}$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)x_2 = 0$$

になって、

$$x_1 + \left(\sqrt{3}-2\right)x_2 = 0$$

$$x_1 = \left(2-\sqrt{3}\right)x_2$$

だから、

$$t\binom{2-\sqrt{3}}{1}$$

t は任意の実数

が固有値 1 に属する固有ベクトルです。
もう一つの固有値については

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\binom{x_1}{x_2} = \binom{0}{0}$$

$$x_1 = 0$$

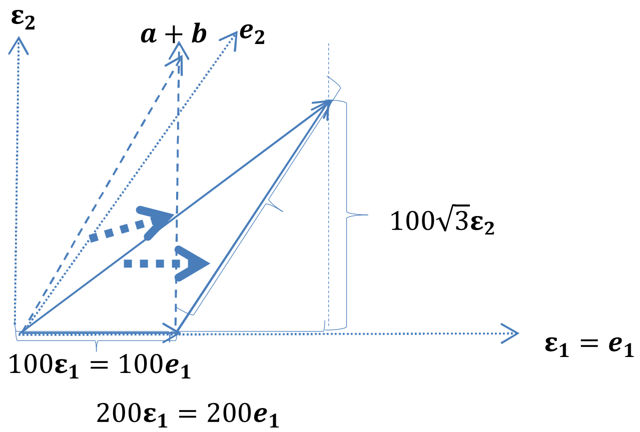
で y は任意の値をとりえるので、ベクトルとしての記述は

$$\mathrm{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

t は任意の実数

となり、x_1軸に平行なベクトルが固有ベクトルの一つとなり、確かに実感と合います。

つまり、下図で示した２本の矢印と並行する矢印は、行列を掛けて変形しても、矢印の向きが変わらないのです。



ここに挙げた例はかなり特殊なので

もう少し一般的な例を上げます。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

の固有値、固有ベクトルを求めます。

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(-2-\lambda) + 12$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda - 10 + 12$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = 2 \ \text{ or } \ \lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に、$\lambda = 2$ を代入

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - 2x_2 = 0$$

固有値$\lambda = 2$に属する固有ベクトルは

$$\mathrm{t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$を代入

$$\begin{pmatrix}4 & -6\\2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$2x_1 - 3x_2 = 0$$

固有値$\lambda = 1$に属する固有ベクトルは

$$\mathrm{t}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

となります。ここで見たように,固有値を求めるには

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

を解けばよいのです。これを一般化して書くと

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$$

$\boldsymbol{E}$は単位行列

と書けます。これを行列 A の固有方程式といいます。

これに対してλを t に変えたものを

$$|\boldsymbol{A} - t\boldsymbol{E}|$$

を固有多項式といいます。

$$\phi_A(t) = |\boldsymbol{A} - t\boldsymbol{E}|$$

と表すことが多いと思います。行列$\boldsymbol{A}$と行列$\boldsymbol{B}$ が相似であれば,

$$\phi_A(t) = \phi_B(t)$$

であり、行列$\boldsymbol{A}$と行列$\boldsymbol{B}$の固有値は一致します。

まとめ

行列の演算や拡張に関してはさらに様々な定理や方法があります。勉強すればそれなりに世界が広がりますが、今考えようとしている多変量解析は、以上の知識で十分理解可能だと思います。実際に計算ができるかどうかはまた別の話です。それは適当なソフトやプログラムを見つけてください。行列と行列式のついての解説は以上でとどめます。それ以上の知識を求める場合には成書を参考にしてください。もし将来必要があれば、本稿を修正・加筆する予定ですので、必要があればコメントを下さい。もともとこの解説は、学生に質問されたときに、とっさに答えに窮しないように作ったメモがベースです。筆者は数学や統計学の専門家ではありません（水産増殖学が専門）。多くの誤りや不適切な表現が含まれていると思います。誤りや改善点のご指摘を頂ければ幸いです